

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS 7

Specialité :

Astrophysique et Techniques Spatiales

(Ecole Doctorale d'Astronomie-Astrophysique d'Ile de France)

présentée par :

Yannis PAPAPHILIPPOU

Sujet de la thèse:

**APPLICATION DE LA METHODE D'ANALYSE EN FREQUENCE
EN DYNAMIQUE GALACTIQUE**

Rapporteurs :

M. David MERRITT (Université Rutgers)

M. Daniel PFENNIGER (Observatoire de Genève)

Soutenue à l'Observatoire de Paris, le 27 janvier 1997 devant le Jury composé de :

M. André BRAHIC (Université Paris 7)Président du Jury

Mme. Lia ATHANASSOULA (Observatoire de Marseille)Examinatrice

Mme. Françoise COMBES (Observatoire de Paris)Examinatrice

M. George CONTOPOULOS (Université d'Athènes) Examineur

M. Daniel PFENNIGER (Observatoire de Genève) Rapporteur

M. Jacques LASKAR (Bureau des Longitudes)Directeur de Thèse

Application de la Méthode d'Analyse en Fréquence en Dynamique Galactique

Yannis P. PAPAPHILIPPOU
Astronomie et Systèmes Dynamiques
Bureau des longitudes

February 11, 1997

Remerciements

Je voudrais exprimer tout d'abord ma plus profonde reconnaissance à *Jacques Laskar*, mon directeur de thèse, pour m'avoir proposé ce travail et m'avoir prodigué un très grand soutien scientifique et matériel tout au long du parcours. Grâce à lui ma thèse s'est déroulée dans des très bonnes conditions. De plus, je lui sais gré de m'avoir mis en contact avec d'autres chercheurs, ce qui me permettra de continuer la recherche dans le domaine des systèmes dynamiques appliqués.

Pendant ces 4 dernières années, j'ai eu la chance d'avoir partagé un bureau ainsi que complicité et amitié avec *Philippe Robutel*. Ces remarques pertinentes sur les aspects théoriques de ce travail ainsi que son calme, ses souris et son soutien morale quotidien m'ont aidé à surpasser les obstacles souvent rencontrés. Je tiens à remercier encore une fois Philippe et sa compagne *Laurence Klock* pour la correction d'une grande partie de ce rapport de thèse.

Je remercie sincèrement *André Brahic* pour son soutien pendant ma première année en France et pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Mes remerciements vont également à *Lia Athanassoula*, *Françoise Combes*, *Daniel Pfenniger* et *George Contopoulos* pour avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse. Je tiens à remercier tout spécialement *David Merritt* et *Daniel Pfenniger* pour l'analyse critique de mon travail.

Au cours de ce travail j'ai reçu l'aide et les conseils précieux de *Lia Athanassoula*, *George Contopoulos*, *Tim de Zeeuw*, *David Merritt* et *Daniel Pfenniger*, tous des spécialistes de la dynamique galactique. J'ai eu aussi l'occasion d'avoir des discussion scientifiques sur des problèmes particuliers des systèmes dynamiques avec *Tassos Bountis*, *Jacky Cresson*, *Alessandro Morbidelli* et *Charis Skokos*.

Ce travail a été effectué au sein de l'équipe Astronomie et Systèmes Dynamiques du Bureau des longitudes et je tiens à remercier le directeur de l'équipe *Alain Chenciner*, le directeur de l'URA 707 *Jean-Eudes Arlot* ainsi que l'ensemble du personnel pour son accueil chaleureux. Je voudrais remercier aussi les membres de l'équipe ASD, *Alain Albouy*, *Frédéric Joutel*, *Laurent Niederman* et *David Sauzin* pour l'aide qui m'ont apporté pendant mon séjour. Je n'oublie pas les *étudiants* et *ex-étudiants* du BDL pour leurs aides diverses et variées et je leur souhaite "bon vent" pour la suite.

Je ne peux oublier d'adresser ma profonde gratitude à mon père *Panos*, ma mère *Pitsa*, ma soeur *Dina* ainsi que mon oncle *Costas* pour leur affection et leur soutien capitale durant toutes mes longues années d'études. Je voudrais enfin remercier mon amie *Roubini* pour sa patience et pour m'avoir prouvé que nos rêves peuvent être toujours réalisés.

Table des Matières

Liste des Figures	5
Liste des Tableaux	7
Résumé	9
Introduction	11
1 Considérations Générales	15
1.1 Systèmes dynamiques et dynamique galactique	15
1.1.1 Le problème d'auto-consistance des modèles galactiques	15
1.1.2 Le choix des variables - Les variables action-angle	17
1.1.3 Les orbites chaotiques et la forme des galaxies elliptiques	18
1.2 Contraintes observationnelles pour les galaxies elliptiques	20
2 Le Potentiel Logarithmique	25
2.1 Choix du potentiel	25
2.2 La fonction de densité	27
2.2.1 Rapports axiaux des surfaces de niveaux de densité	28
2.2.2 Espace des valeurs admissibles des rapports axiaux	31
2.3 Structure hamiltonienne	31
2.3.1 Cas associés à des mouvements rectilignes	32
2.3.2 Cas sphérique	38
2.3.3 Cas plans avec des symétries centrales	42
3 Le Système Logarithmique Plan	43
3.1 Structure orbitale du système plan	44
3.2 Traitement Perturbatif	46
3.2.1 Modèle Rectiligne	46
3.2.2 Modèle central	47
3.3 La méthode d'analyse en fréquence	50
3.3.1 Mouvements quasi-périodiques	50
3.3.2 Analyse numérique des fréquences fondamentales (NAFF)	52
3.3.3 Application fréquence ("frequency map")	53
3.4 Approximations quasi-périodiques	55
3.4.1 Orbites "boîte"	55
3.4.2 Orbites "boucle"	58
3.5 Variables action-angle	61
3.5.1 Modèle rectiligne	61

3.5.2	Modèle central	64
3.5.3	Hamiltonien général	67
3.6	Comparaison avec des travaux antérieurs	71
3.7	Applications fréquence (“frequency maps”)	75
3.7.1	Cas “physiques”	77
3.7.2	Cas “non-physiques”	81
3.7.3	Orbites périodiques	83
4	Le Système Logarithmique Triaxial	85
4.1	Types d’orbites	85
4.2	Approximations quasi-périodiques	87
4.2.1	Orbites “boîte”	87
4.2.2	Orbites “tube”	89
4.3	Les applications fréquence du problème triaxial	97
4.3.1	Choix des paramètres	97
4.3.2	Construction des applications fréquence	98
	Conclusion	125
	Bibliographie	129

Liste des Figures

2.1	Lignes de niveau de la fonction de densité	27
2.2	La galaxie elliptique M32	30
2.3	Espace des phases du système à 1 degré de liberté sur le plan (x, X)	33
2.4	Diagrammes de stabilité des orbites périodiques rectilignes	34
2.5	Orbites du système sphérique	40
3.1	Surface de section et orbites typiques du système plan	44
3.2	Indices de stabilité pour les deux orbites périodiques (x, X) et (y, Y)	47
3.3	Surface de section du système central	48
3.4	Diagramme de bifurcation des orbites périodiques “boucle”	49
3.5	Calcul des variables action-angle des système intégrable	63
3.6	Transformation en variables action-angle pour les modèles intégrables	65
3.7	Transformation en variables action-angle d’une surface de section $y = 0$, pour $q = 0.9$	67
3.8	Transformation en variables action-angle d’une surface de section $y = 0$, pour $q = 0.8$	72
3.9	Transformation en variables action-angle d’une surface de section $y = 0$, pour $q = 0.7$	73
3.10	Applications fréquence dans le cas du pendule	74
3.11	Applications fréquence pour les orbites “boîte” - $q = 0.9, 0.8$ et 0.7	76
3.12	Applications fréquence pour les orbites “boucle” - $q = 0.9, 0.8$ et 0.7	77
3.13	Surfaces de section pour $q = 0.6, 0.5$ et 0.4	78
3.14	Applications fréquence pour les orbites “boîte” - $q = 0.6, 0.5$ et 0.4	79
3.15	Applications fréquence pour les orbites “boucle” - $q = 0.6, 0.5$ et 0.4	80
3.16	Diffusion d’une orbite irrégulière typique	81
3.17	Surfaces de section pour $q = 0.3$ et 0.2	82
3.18	Applications fréquence pour $q = 0.3$ et 0.2	83
3.19	Orbites périodiques principales du système logarithmique plan	84
4.1	Orbites typiques du système logarithmique général	86
4.2	Applications fréquence pour les orbites “boîte” $(q_1 = 1.15, q_2 = 1.25)$ - $(q_1 = 1.1, q_2 = 0.9)$ - $(q_1 = 1.15, q_2 = 0.9)$ - $(q_1 = 1.25, q_2 = 0.9)$	102
4.3	Plans des moments pour le premier groupe d’applications fréquence	103
4.4	Applications fréquence pour les orbites “boîte” $(q_1 = 1.35, q_2 = 0.9)$ - $(q_1 = 1.5, q_2 = 0.9)$ - $(q_1 = 1.8, q_2 = 0.9)$ - $(q_1 = 2.25, q_2 = 0.9)$	105
4.5	Plans des moments pour le deuxième groupe d’applications fréquence	106

4.6	Applications fréquence pour les orbites “boîte” ($q_1 = 1.35, q_2 = 1.25$) - ($q_1 = 0.95, q_2 = 0.75$) - ($q_1 = 0.9, q_2 = 0.7$) - ($q_1 = 1.2, q_2 = 0.75$)	108
4.7	Diffusion d’une orbite irrégulière typique du système triaxial	109
4.8	Plans des moments pour le troisième groupe d’applications fréquence	110
4.9	Plans des conditions initiales, pour $q_1 = 1.1, q_2 = 0.9$	113
4.10	Applications fréquence pour des orbites “tube” $q_1 = 1.1, q_2 = 0.9$	114
4.11	Plans des conditions initiales dans les positions associées au moyen et au grand axe ($q_1 = 1.15, q_2 = 1.25$) - ($q_1 = 1.1, q_2 = 0.9$) - ($q_1 = 1.15, q_2 = 0.9$) - ($q_1 = 1.25, q_2 = 0.9$)	116
4.12	Plans des conditions initiales dans les positions associées au moyen et au petit axe ($q_1 = 1.15, q_2 = 1.25$) - ($q_1 = 1.1, q_2 = 0.9$) - ($q_1 = 1.15, q_2 = 0.9$) - ($q_1 = 1.25, q_2 = 0.9$)	117
4.13	Plans des conditions initiales dans les positions associées au moyen et au grand axe ($q_1 = 1.35, q_2 = 0.9$) - ($q_1 = 1.5, q_2 = 0.9$) - ($q_1 = 1.8, q_2 = 0.9$) - ($q_1 = 2.25, q_2 = 0.9$)	120
4.14	Plans des conditions initiales dans les positions associées au moyen et au petit axe ($q_1 = 1.35, q_2 = 0.9$) - ($q_1 = 1.5, q_2 = 0.9$) - ($q_1 = 1.8, q_2 = 0.9$) - ($q_1 = 2.25, q_2 = 0.9$)	121
4.15	Plans des conditions initiales dans les positions associées au moyen et au grand axe ($q_1 = 1.35, q_2 = 1.25$) - ($q_1 = 0.95, q_2 = 0.75$) - ($q_1 = 0.9, q_2 = 0.7$) - ($q_1 = 1.2, q_2 = 0.75$)	122
4.16	Plans des conditions initiales dans les positions associées au moyen et au petit axe ($q_1 = 1.35, q_2 = 1.25$) - ($q_1 = 0.95, q_2 = 0.75$) - ($q_1 = 0.9, q_2 = 0.7$) - ($q_1 = 1.2, q_2 = 0.75$)	123

Liste des Tableaux

0.1	Temps de relaxation des systèmes stellaires	12
3.1	Analyse en fréquence de l'orbite "boîte" \mathcal{B}_1	56
3.2	Analyse en fréquence de l'orbite "boîte" périodique \mathcal{B}_2	57
3.3	Analyse en fréquence de l'orbite "boucle" \mathcal{L}_1	58
3.4	Analyse en fréquence de l'orbite "boucle" \mathcal{L}_2 du modèle central	59
3.5	Analyse en fréquence de l'orbite "boucle" \mathcal{L}_2 , écrite en coordonnées polaires . . .	60
3.6	Fréquences fondamentales des orbites du modèle rectiligne	62
3.7	Fréquences fondamentales des orbites du modèle central	64
3.8	Analyse en fréquence de l'orbite "boîte" \mathcal{B}_1 , exprimée en variables action-angle .	66
3.9	Analyse en fréquence de l'orbite "boucle" \mathcal{L}_1 , exprimée en variables polaires . . .	68
3.10	Analyse en fréquence de l'orbite "boucle" \mathcal{L}_1 , exprimée en variables action-angle	69
3.11	Détermination de la fréquence fondamentale pour plusieurs orbites "boîte"	70
3.12	Détermination de la fréquence fondamentale pour plusieurs orbites "boucle" . . .	71
4.1	Analyse en fréquence de l'orbite "boîte" \mathcal{B} du système triaxial	88
4.2	Analyse en fréquence de l'orbite "tube de petit axe" \mathcal{T}_S	90
4.3	Analyse en fréquence de la solution moyennisée de l'orbite "tube de petit axe" \mathcal{T}_S	92
4.4	Analyse en fréquence de l'orbite "tube extérieur de grand axe" \mathcal{T}_O	94
4.5	Analyse en fréquence de la solution moyennisée de l'orbite "tube extérieur de grand axe" \mathcal{T}_O	95
4.6	Analyse en fréquence de l'orbite "tube intérieur de grand axe" \mathcal{T}_I	96
4.7	Analyse en fréquence de la solution moyennisée de l'orbite "tube intérieur de grand axe" \mathcal{T}_I	98
4.8	Paramètres de perturbation, rapports axiaux des équipotentiels et paramètres de forme	99
4.9	Orbites "boîte" périodiques correspondant aux applications fréquence	100

Résumé

Dans le but de clarifier les aspects dynamiques des modèles galactiques triaxiaux, nous étudions le potentiel logarithmique à travers la méthode d'analyse en fréquence de Laskar. Les caractéristiques dynamiques principales du système sont présentées en utilisant le formalisme hamiltonien approprié. Afin de comparer cette nouvelle approche avec des études précédentes, nous appliquons la méthode à la version axisymétrique du potentiel. La précision de la méthode est démontrée à travers des techniques perturbatives et des transformations numériques en variables action-angle. En outre, la construction des applications fréquence pour plusieurs valeurs du paramètre de perturbation nous permet de fournir une vision globale de la dynamique du potentiel plan. Nous détectons les zones chaotiques, les résonances importantes ainsi que les orbites périodiques.

La méthode est appliquée ensuite à la version tridimensionnelle du potentiel logarithmique. Les approximations quasi-périodiques fournies par la méthode nous permettent de clarifier la dynamique des types d'orbites principales et leur connexion avec des perturbations du hamiltonien général. Tous les détails fins de la dynamique, qui sont associés à l'addition du troisième degré de liberté, sont représentés dans les applications fréquence complètes, des images instantanées du réseau d'Arnold ("Arnol'd web") du système. Ainsi, nous pouvons visualiser l'étendu des zones chaotiques et l'influence des lignes résonantes dans l'espace physique du système. Cette approche révèle plusieurs caractéristiques dynamiques inconnues des potentiels galactiques triaxiaux et indique que le chaos doit être une caractéristique importante des configurations triaxiales. Nous discutons finalement l'influence de ces résultats sur la construction des modèles galactiques auto-consistants.

Mots-Clés : Dynamique Stellaire – Galaxies Elliptiques – Systèmes Dynamiques – Systèmes 3 Degrés de Liberté – Variables Action-Angle – Chaos – Diffusion – Modèles Auto-consistants Tridimensionnels

Summary

We study the well-known logarithmic galactic potential through the frequency map analysis method of Laskar in order to deepen our knowledge regarding the dynamics of triaxial power-law galactic models. The principal dynamical features of the system are reviewed within the appropriate Hamiltonian frame of reference. The impact of this new approach in galactic dynamics is investigated by applying the method to the axisymmetric version of the logarithmic potential. The reliability of the method is demonstrated via perturbative techniques and numerical transformations in action-angle variables. Comparison with previous studies involving Fourier methods are also given. By means of frequency map analysis, we provide a global vision of the dynamics of the planar potential for various values of the perturbation parameter. The location and extent of the chaotic zones can be easily visualised. All the important resonances are detected with their actual strength, as well as the associated periodic orbits.

The method is then applied to the complete three-dimensional version of the logarithmic potential. The quasi-periodic approximations furnished by the method permit to clarify the dynamics of the principal types of orbits and their connection with perturbations of integrable cases of the general Hamiltonian. All the fine details of the dynamics associated with the addition of the third degree of freedom are displayed in the complete frequency map, a direct representation of the system's Arnol'd web. The extent of the chaotic zones and the influence of resonant lines are directly visualized in the physical space of the system. This approach reveals many unknown dynamical features of triaxial galactic potentials and gives strong indications that chaos should be an innate characteristic of triaxial configurations. The impact of these results in the construction of self-consistent galactic models are finally discussed.

Key Words: Stellar Dynamics – Elliptical Gallaxies – Dynamical Systems – 3 Degrees of Freedom Systems – Action-Angle Variables – Chaos – Diffusion – Self-consistent Threedimensional Models

Introduction

Depuis l'antiquité, les premiers observateurs étaient impressionnés par le large ruban lumineux qui traverse le ciel nocturne. La mythologie Grecque symbolisa cette bande comme le jet de lait échappé par le sein de la déesse Héra (Junon) pour allaiter le héros mythique Héraclès (Hercule), d'où l'origine de son nom $\Gamma α λ α ξ ί α ς$ (Voie Lactée). La première description de la Voie Lactée est donnée par Ptolémée dans le livre VII de son oeuvre majeur, la "Composition Mathématique". Ce n'est qu'à la fin du 18ème siècle qu'à l'aide d'un télescope de sa propre fabrication, William F. Herschel, musicien et astronome autodidacte, donna une nouvelle vision de notre Galaxie, en étudiant systématiquement la répartition des étoiles sur le ciel. Pour lui, il paraissait évident que la Galaxie forme un système stellaire cohérent. Finalement, en 1924, Edwin P. Hubble observa avec le télescope de Mount Wilson que la nébuleuse d'Andromède ne fait pas partie de notre Galaxie. Ainsi, il montra que notre Galaxie n'est pas unique dans l'Univers.¹

Etant considérées comme des briques qui permettraient de construire l'Univers, les galaxies dominent, actuellement, l'intérêt astronomique. En même temps, elles sont des structures compliquées contenant des milliards d'étoiles (entre 10^{10} et 10^{12}) et du gaz, où plusieurs processus physico-chimiques, dynamiques et autres entrent en jeu, en rendant unique chacune d'entre elles. C'est pour cette raison que James Binney et Scott Tremaine suggèrent dans leur livre classique sur la dynamique galactique, qu'en astronomie les galaxies jouent un rôle équivalent à celui tenu par les écosystèmes en biologie : ce sont des systèmes très complexes et relativement isolés qui évoluent continuellement mais qui présentent aussi une auto-organisation frappante (voir [22], p. 7).

L'approche principale pour l'étude de l'évolution des galaxies est la **dynamique stellaire**. Ceci peut être définie comme l'étude du mouvement d'un très grand nombre d'étoiles, considérées comme des points massifs, en interaction gravitationnelle. La préoccupation majeure de la dynamique galactique est de réconcilier ces mouvements avec la morphologie des galaxies observées.

Comme dans tous les domaines de la physique théorique, le but de la dynamique galactique est la construction des modèles destinés à éclaircir le comportement physique du système en question. Il est fondamental pour la conception des tels modèles de faire certaines hypothèses dictées soit par des lois physiques soit par l'observation. Mais dans le deuxième cas, l'observation n'est qu'instantanée comparée à la durée de vie d'un tel système et biaisée par la position géocentrique de l'observateur.

La construction des modèles galactiques se base principalement sur la considération que l'**interaction gravitationnelle** entre les étoiles, est responsable de l'évolution dynamique du système, le champ magnétique existant étant très faible (sa valeur moyenne est de l'ordre de

¹Pour les notes historiques on peut se référer au livre de Pannekoek [144]

système stellaire	nombre de corps N	t_{cross}	t_{rel}	durée de vie
amas globulaires	10^5	10^5	10^8	10^{10}
amas ouverts	10^2	10^6	3×10^6	10^8
noyaux galactiques	10^8	10^4	7×10^9	10^{10}
amas des galaxies	10^3	10^9	2×10^{10}	10^{10}
galaxies	10^{11}	10^8	5×10^{18}	10^{10}

Tableau 0.1 : Le temps de relaxation des différents systèmes stellaires (équation (0.1)) en comparaison avec leur durée de vie, t_{cross} étant le temps de traversée du système et t_{rel} le temps de relaxation

2×10^{-6} pour les galaxies spirales [22]). En outre, cette interaction gravitationnelle est formulée par la lois classique de Newton : en général, les effets relativistes sont négligeables, même si on a trouvé des indices de l'importance de ces derniers aux centres de certaines galaxies [78].

De par le grand nombre d'étoiles qui composent les galaxies, la dynamique de ces dernières peut être étudiée de manière statistique. Toutefois, contrairement à la théorie cinétique de gaz, dans laquelle les interactions à courte échelle sont prédominantes, ici, seule l'interaction à longues distances est prise en compte. En effet, les étoiles d'une galaxie forment un ensemble dynamique **sans collisions**. On peut montrer [173] que le temps de relaxation t_{rel} , c.-à-d. le temps au bout duquel les rencontres proches deviennent importantes dans un système stellaire comprenant N étoiles, est de l'ordre de :

$$t_{rel} \approx \frac{N}{8 \ln N} t_{cross} , \quad (0.1)$$

où t_{cross} est le temps de traversée du système par une étoile qui se déplace sur une ligne droite, sous l'influence d'un champ homogène. Or, pour les galaxies, qui contiennent typiquement 10^{11} étoiles, le temps de traversée est de l'ordre de 10^8 , d'où $t_{rel} \approx 10^{17}$ (7 ordres de grandeur supérieurs à l'âge de l'Univers). De ce fait, dans les galaxies, les collisions peuvent être complètement négligées, ce qui n'est pas le cas pour d'autres systèmes stellaires (Tableau 0.1).

La plupart des galaxies étant toujours en évolution, elles ne peuvent pas être considérées en état d'équilibre thermodynamique (ce qui se traduit par la maximisation de leur entropie). Pourtant, on peut supposer qu'elles se trouvent dans un **état stationnaire** : leur densité à chaque point de l'espace est invariante par rapport au temps. Les rencontres proches étant rares, on peut aussi considérer que le mouvement d'une étoile est déterminé par l'attraction gravitationnelle exercée par toutes les autres étoiles. Alors, en négligeant en première approximation la petite fraction de masse sous forme de gaz (ce qui semble tout à fait plausible pour les galaxies elliptiques, par exemple), on peut écrire les équations du mouvement, pour une étoile de masse m_k :

$$m_k \ddot{\mathbf{q}}_k = -G \sum_{l \neq k}^N m_l m_k |\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_k|^{-1} , \quad \text{avec } i = 1, \dots, 3, \quad k = 1, \dots, N , \quad (0.2)$$

où \mathbf{q} désigne le vecteur des positions et G est la constante de la gravitation. Si le nombre d'étoiles est N , les équations du mouvement forment un système différentiel à $6N$ dimensions. L'intégration directe de ce système est effectuée à travers des codes numériques de modélisation

de l'interaction gravitationnelle des N -corps. La puissance informatique requise limite actuellement le nombre de corps à 10^4 dans les simulations (ou $10^6 - 10^7$ pour un champ moyen) [1].

D'autre part, une approximation commune est de considérer que la masse, au lieu d'être concentrée sur des points discrets de l'espace, est distribuée uniformément dans tout le système, en générant un **potentiel moyen**. On peut alors choisir un potentiel *ad hoc* en se basant sur des contraintes observationnelles, pour chaque type de galaxie. Cette dernière approche se ramène à étudier un système dynamique conservatif (l'énergie se conserve le long des orbites). En effet, le but principal de la dynamique galactique reste toujours le même : la construction d'un modèle galactique qui est **auto-consistant** (système dans lequel la masse totale des étoiles peut reproduire la distribution de densité générée par le potentiel étudié et inversement).

La dynamique galactique est un domaine de l'astrophysique moderne où l'application de la théorie des systèmes dynamiques s'est révélée très fructueuse. Grâce à l'évolution rapide des méthodes mathématiques pour l'exploration des systèmes dynamiques hamiltoniens, nous disposons aujourd'hui des outils efficaces pour l'étude des systèmes galactiques, comme la **méthode d'analyse en fréquence** de Laskar [106], [107], [110]. L'objectif de ce travail de thèse est d'utiliser ces outils pour interpréter le comportement d'un potentiel classique (le potentiel logarithmique) qui modélise en première approximation les mouvements des toiles dans les galaxies elliptiques. Cette étude nous permettra d'aborder certains problèmes théoriques ouverts de la dynamique galactique qui semblent parfois résulter d'une utilisation incomplète des aspects du formalisme hamiltonien.

Ce mémoire de thèse est organisé de la façon suivante : dans le chapitre 1 nous présenterons quelques notions fondamentales de la théorie des systèmes dynamiques et leurs liens avec la dynamique galactique, ainsi qu'un brève résumé sur les contraintes observationnelles des galaxies elliptiques. Dans le chapitre 2, nous étudierons en détail les considérations physiques qui ont mené à l'utilisation du potentiel logarithmique dans la dynamique galactique. Par la suite, nous utiliserons le formalisme hamiltonien pour clarifier et bien mettre en évidence les spéculations révélées dans des études précédentes sur la structure de son espace des phases.

Dans la perspective d'obtenir des informations supplémentaires sur le comportement du système complet, nous étudierons d'abord le cas plan du potentiel logarithmique (chapitre 3). Après avoir résumé les concepts principaux de l'analyse en fréquence, nous utiliserons son aspect fondamental (l'approximation des solutions numériques par des séries quasi-périodiques) afin d'éclaircir la structure orbitale du système plan. Par la suite, nous étudierons l'influence d'une transformation du système dans des variables plus adaptées. Cette étude nous permettra aussi de comparer notre approche avec la méthode d'analyse de Fourier de Binney et ses collaborateurs [20], [21], [127], [19], [94], [95]. Finalement, nous étudierons globalement l'espace des phases du système à travers des **applications fréquence** ("frequency maps").

Il paraît naturel que l'addition d'un degré de liberté change considérablement la dynamique du système. Alors, sur les bases précédentes, nous étudierons le système triaxial (Chapitre 4). Nous suivrons environs le même chemin utilisé pour l'étude du système à 2 degrés de liberté. Les approximations quasi-périodiques des orbites régulières seront un moyen nous permettant de comprendre la connexion de ces orbites à des perturbations du hamiltonien général. La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à l'étude de la dynamique globales du système à travers les applications fréquence complètes, pour un grand nombre de rapports axiaux. A partir de cette étude nous pourrons lier le comportement dynamique du système avec l'espace physique du modèle logarithmique. Dans le dernier chapitre nous esquisserons les résultats

acquis dans ce travail de thèse, et leur impact dans des problèmes concrets de la dynamique galactique. Nous donnerons ainsi quelques propositions pour des études dans le futur.

Chapitre 1

Considérations Générales

Dans les paragraphes qui suivent nous exposerons le problème d'auto-consistance des modèles galactiques. Cette question fondamentale de la dynamique galactique est étroitement liée à des aspects de la théorie des systèmes dynamiques modernes, notamment le choix des variables dans un système hamiltonien général, ainsi que l'existence des orbites irrégulières dans le cas des systèmes associés à des potentiels galactiques triaxiaux. En effet, des arguments théoriques aussi bien qu'observationnels que nous présenterons à la fin de ce chapitre montrent qu'il y a des fortes chances que la forme d'un grand nombre de galaxies elliptiques n'est pas représentée par un ellipsoïde de révolution (axisymétrique) mais plutôt par un ellipsoïde avec trois axes asymétriques.

1.1 Liens entre la théorie des systèmes dynamiques et la dynamique galactique

1.1.1 Le problème d'auto-consistance des modèles galactiques

L'état macroscopique d'un système gravitationnel est décrit complètement par une fonction de distribution de densité $f = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$, de l'espace des phases, qui dépend de toutes les variables des positions \mathbf{q} , des moments conjugués \mathbf{p} , et du temps t , c.-à-d. de sept variables au total dans le cas d'un modèle galactique à 3 dimensions. Cette fonction positive représente la fraction de masse comprise dans un élément de volume $d^3\mathbf{q}d^3\mathbf{p}$ de l'espace des phases. D'autre part, dans le cas d'une galaxie, la fonction de distribution de densité respecte l'**équation de Boltzmann sans collision** (ou équation de Vlassov) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\dot{q}_i \frac{\partial f}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = 0 \quad , \quad (1.1)$$

qui était formulée par Boltzmann [24], [25] dans ces études sur le gaz parfait et ensuite introduite par Vlassov [185], [186] dans la physique de plasma (pour plus des détails voir [174]). En utilisant les équations de Hamilton, nous voyons clairement que la somme qui constitue le deuxième membre de l'équation (1.1) n'est autre que le crochet de Poisson de f et H , soit :

$$[f, H] = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) \quad . \quad (1.2)$$

Dans cette expression $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ est le hamiltonien, dont la valeur représente l'énergie totale du système. Cette fonction est une intégrale du mouvement dans le cas d'un système conservatif (elle reste constante le long des orbites). L'équation (1.1) s'écrit, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0 \quad . \quad (1.3)$$

L'équation de Boltzmann est une équation de continuité analogue à celle vérifiée par la densité d'un fluide ordinaire. C'est un cas spécial de l'**équation de Liouville** qui équivaut à l'incompressibilité du flot hamiltonien. Si la galaxie étudiée se trouve en état stationnaire, la fonction de distribution de densité doit être constante par rapport au temps ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$), ce qui entraîne que f est une intégrale du mouvement et, par conséquent, elle doit dépendre seulement des intégrales existantes. Cette remarque fait l'objet du théorème de Jeans [93], qui peut se formuler ainsi : *Toutes les solutions stationnaires de l'équation de Boltzmann sans collision sont exprimées en fonction des variables (q, p) à travers les intégrales du mouvement du système, et réciproquement, toute fonction des intégrales du mouvement est une solution stationnaire de l'équation de Boltzmann sans collision.*

Considérons maintenant, un potentiel $\Phi(\mathbf{q})$. Par l'équation de Poisson :

$$\Delta \Phi(\mathbf{q}) = 4\pi G \rho(\mathbf{q}) \quad , \quad (1.4)$$

on peut déterminer la densité $\rho(\mathbf{q})$ du modèle choisi. Du fait que f représente une fonction de distribution de densité de l'espace des phases, son intégrale dans tout l'espace des vitesses V_p du système donne la densité spatiale :

$$\rho(\mathbf{q}) = \int \int \int_{V_p} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p} \quad . \quad (1.5)$$

La question qui se pose, alors, est de trouver la fonction de distribution f , qui vérifie l'équation intégrale (1.5) et de prouver l'auto-consistance du modèle choisi. Le développement d'une technique pour la construction des modèles galactiques auto-consistants reste toujours un problème fondamental de l'astronomie dynamique. Ce problème est généralement assez difficile, car il est fortement lié à l'existence et à la connaissance des intégrales du mouvement à travers lesquelles on pourrait représenter la fonction de distribution f .

Dans certains cas, quand le système est intégrable ou même quand il possède deux intégrales du mouvement qui sont connues explicitement, il est possible de résoudre analytiquement l'équation (1.5) et de fournir des fonctions de distribution qui dépendent des intégrales existantes (voir par exemple [53], [22], [92], [67], [59], [77], [57]). Néanmoins, ces approches sont applicables à une petite minorité des modèles galactiques. En effet, pour la plupart des systèmes réalistes on ne connaît explicitement qu'une intégrale, celle de l'énergie.

M. Schwarzschild a été le premier à formuler une approche alternative, à travers un code de programmation linéaire basé sur l'intégration numérique des équations de mouvement du système [168], [169]. Le concept fondamental de cette méthode est le calcul numérique de f sur chaque élément d'une partition de l'espace des vitesses. Alors que l'intégration numérique est une procédure assez directe, la construction de la partition demande un grand degré d'intuition. En effet, à cause du mauvais choix de variables, la méthode peut être numériquement instable quand on change la taille des éléments du maillage considéré [103], [170].

1.1.2 Le choix des variables - Les variables action-angle

Outre le problème d'auto-consistance, la complexité dans la dynamique de la plupart des modèles galactiques montre l'importance d'un bon choix de variables. En principe, dans un hamiltonien générique représenté par une fonction $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, les variables qui simplifient l'étude de sa dynamique quand elles existent, sont les **variables action-angle** d'une approximation intégrable du système en question.

Plus exactement, un système hamiltonien H_0 à n degrés de liberté ($n = 3$ dans le cas des potentiels galactiques) est intégrable, quand ils existent n intégrales du mouvement (n quantités indépendantes qui sont constantes le long des orbites du système et en involution, dans le sens que leurs crochets de Poisson s'annulent). De plus, les intégrales du mouvement définissent des variétés invariantes topologiquement conjuguées à des tores de dimension n (ou à des cylindres si le système n'est pas compact) où le mouvement est linéaire. Ce théorème classique pour l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens est démontré par Liouville [121], (voir aussi [7], p. 269). Une extension du théorème donnée par Arnold [2] énonce qu'on peut toujours définir un système des variables symplectiques, les variables action-angle, qui peuvent représenter les mouvements dans un voisinage de ces tores. En général, les actions peuvent être obtenues par l'intégrale :

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \mathbf{p} \, d\mathbf{q} \, , \quad (1.6)$$

où γ_i est un lacet fermé sur les tores invariants. Après une transformation en variables action-angle, le hamiltonien du système s'écrit comme une fonction des actions seulement :

$$H_0 = H_0(\mathbf{J}) \, . \quad (1.7)$$

En utilisant les équations de Hamilton, nous voyons facilement que, dans le cas intégrable, les actions sont n intégrales indépendantes et les angles sont des fonctions linéaires du temps :

$$\dot{J}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = \frac{\partial H_0(\mathbf{J})}{\partial J_i} = \nu_i(\mathbf{J}) \quad \text{avec} \quad i = 1, \dots, n \, , \quad (1.8)$$

où $\nu_i(\mathbf{J})$ sont les fréquences du mouvement qui dépendent des actions. Alors, dans le cas d'un système intégrable, tous les mouvements sont quasi-périodiques et évoluent sur des produits des cercles de rayon J_i , qui forment les tores invariants de dimension n .

Maintenant, considérons un système qui n'est pas intégrable mais qu'il peut être écrit comme une perturbation d'un tel système :

$$H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\varphi}) = H_0(\mathbf{J}) + \varepsilon H_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\varphi}) \, . \quad (1.9)$$

Dans ce cas, certains tores sont détruits. Néanmoins, suivant la **théorie KAM** [99], [3], [140], ils existent certaines conditions pour lesquelles la majorité des tores persistent et les mouvements sur ces tores déformés restent quasi-périodiques.

Sur cet ensemble discontinu de tores on peut toujours définir des variables action-angle. Malheureusement, dans ce cas, les variables d'action ne sont pas définies à travers une transformation analytique et donc ne constituent pas un système global des variables pour tout l'espace des phases. Cependant, il y a actuellement un intérêt croissant pour le développement des méthodes semi-analytiques/semi-numériques de transformation, afin d'obtenir des variables action-angle sur les tores persistants après la perturbation, ou des interpolations de ces variables

dans l'espace complémentaire [88], [137], [189]. En dynamique galactique, cet intérêt est attesté par les études de Binney et ses collaborateurs [127], [19], [94], [95]. Toutefois, ces méthodes présentent diverses difficultés, surtout quand la perturbation est grande. Dans ce cas, la mesure de l'ensemble de tores détruits augmente, en rendant de plus en plus difficile et, finalement, impossible l'interpolation numérique.

1.1.3 Les orbites chaotiques et la forme des galaxies elliptiques

En général, les systèmes hamiltoniens associés à des potentiels galactiques ne sont pas intégrables, sauf des rares exceptions (par exemple les potentiels du type Stäckel [56]). Si le système est proche d'un système intégrable, la recherche des intégrales du type actions ou autres peut être utile, non seulement pour simplifier la dynamique du système (chapitre 1.1.2), mais aussi pour fournir une solution alternative du problème d'auto-consistance. Les travaux de George Contopoulos, au début des années '60, sur l'existence d'une "troisième intégrale" dans les systèmes galactiques, allaient dans cette direction [33], [34], [35].

Toutefois, les systèmes galactiques réalistes ne sont pas proche des systèmes intégrables. Alors, les zones régulières correspondant à des tores invariants sont diminuées et elles sont remplacées par des régions irrégulières (chaotiques). Bien que Michel Hénon et Carl Heiles ont mis en évidence l'importance du chaos dans la dynamique stellaire depuis les années '60 [87], son influence dans l'évolution des galaxies n'est pas encore clairement identifiée [129].

En effet, le rôle des orbites chaotiques dans la dynamique galactique est fortement lié au problème de construction des modèles auto-consistants. La question qui se pose est la suivante : peut-on calculer une distribution de densité créée par ces orbites ? Nous avons déjà mentionné ci-dessus que le problème est abordable dans le cas d'un système intégrable ou proche d'un système intégrable. De plus, il est possible de résoudre ce problème pour un système qui est rempli uniformément par des orbites chaotiques (par exemple les systèmes K ou C - pour plus de détails voir [6]). Dans les deux cas (système intégrable ou chaotique), la propriété importante respectée par les orbites sur des sous-variétés spécifiques du système est l'**ergodicité**.¹ Dans le cas d'un système intégrable, les orbites quasi-périodiques sont ergodiques sur les tores. En outre, dans le cas d'un système "complètement" hyperbolique (chaotique), on est capable de calculer une distribution de densité moyenne pour chaque valeur de l'énergie et les superposer pour trouver la distribution de densité totale, dans tout l'espace des phases du système. Malheureusement, la nature n'est pas si simple que ces deux cas extrêmes. La plupart des systèmes hamiltoniens générés par des potentiels galactiques réalistes sont **décomposables** (le contraire d'ergodique) sur les variétés d'énergie. En effet, l'espace des phases est occupé par des orbites régulières évoluant sur des surfaces invariantes suivant la théorie KAM et des orbites chaotiques qui appartiennent dans l'espace complémentaire.

Les quantités physiques qui peuvent être liées à l'existence des zones chaotiques ne sont pas les mêmes pour tous types de galaxies. Par exemple, dans le cas des galaxies barrées et spirales, les trajectoires chaotiques peuvent être importantes à cause de la rotation de l'ensemble et de la perturbation due aux barres [46], [39], [9], [153]. Récemment, pour la construction des modèles

¹Un système dynamique est ergodique si la moyenne temporelle de toute fonction mesurable de l'espace des phases est presque partout égale à sa moyenne spatiale (sauf sur un ensemble de mesure nulle). La notion d'ergodicité dépend de la sous-variété considérée : par exemple, les orbites quasi-périodiques sont toujours ergodiques sur les tores, mais un système hamiltonien n'est jamais ergodique dans tout l'espace des phases, à cause de l'existence d'une intégrale du mouvement qui empêche les orbites à évoluer sur plusieurs variétés d'énergie (pour plus de détails sur la notion d'ergodicité voir [48])

auto-consistants des galaxies de ce type, il était possible d'utiliser des orbites chaotiques pour remplir les régions où la barre rencontre les bras spiraux [41], [97], [98]. Dans ces zones riches en gaz, toutefois, la dissipation doit être déterminante pour l'existence et l'augmentation des régions chaotiques. Cependant, dans le cas des galaxies elliptiques, où la vitesse de rotation est assez faible et où l'influence dynamique du gaz sur les orbites des étoiles peut être négligée [59], [128], [77], l'existence d'orbites irrégulières pourrait être attribuée à la forme triaxiale de ces galaxies.

Il faut souligner que nos considérations en ce qui concerne la morphologie des galaxies elliptiques ont changé ces vingt dernières années. Il était admis auparavant (voir [166], p. 8) que toutes ces galaxies étaient des corps aplatis, avec au moins un axe de symétrie (axisymétriques). Ces hypothèses, ont été remises en question, pour des raisons théoriques (rotation faible, anisotropie des vitesses) [12], [13] et des nouvelles révélations observationnelles (rotation des isophotes, formations des coquilles autour d'elles) [15], [31]. Actuellement, même si nous ne pouvons pas éliminer totalement la possibilité qu'ils existent des galaxies elliptiques axisymétriques [130], l'étude des modèles triaxiaux est indispensable.

Néanmoins, pendant la dernière décennie, mise à part le petit nombre de modèles triaxiaux étant des perturbations de la classe intégrable des systèmes de Stäckel [104], [60], la plupart des potentiels étudiés respectaient des symétries axiales ou étaient proche d'un système axisymétrique. Manifestement, l'existence des symétries des modèles diminue les zones chaotiques. Ce fait constituait un des arguments principaux pour montrer que le chaos n'est vraisemblablement pas important pour la structure des galaxies réelles [162], [17], [20], [75], [76]. Goodman et Schwarzschild [81] ont suggéré que même si des orbites chaotiques peuvent exister dans les modèles utilisés, elles se comportent comme étant des orbites régulières pour des échelles de temps comparables à la vie des étoiles (une centaine de périodes radiales). Ainsi, plusieurs modèles "auto-consistants" étaient construits en utilisant la méthode de programmation linéaire de Schwarzschild [168], soit en utilisant seulement des orbites régulières [168], [178], soit en considérant les deux types de mouvements sans faire aucune distinction entre eux [154], [103], [170]. Il semble donc que ces modèles ne soient pas tout à fait stationnaires [79] parce que la distribution de densité calculée pour les orbites chaotiques est mal déterminée.

De plus, dans le centre des galaxies elliptiques, l'existence des noyaux massifs ou des singularités sur la fonction de densité ("density cusps") mène à la diminution considérable du temps dynamique des étoiles passant à côté de ces régions et donc l'approximation des orbites irrégulières par des régulières peut être sujette à caution. Par conséquent, l'inclusion des orbites irrégulières dans nos modèles semble inévitable [79], [182], [117]. Le travail de Merritt et Fridman [132] contribue à la clarification de ces problèmes : en effet, ils ont construit deux modèles auto-consistants des galaxies elliptiques avec deux types de singularités (raides et faibles). L'inclusion des orbites irrégulières dans le cas du modèle avec la singularité raide a été réussie en supposant que ces orbites soient ergodiques. Alors, la distribution de densité a été calculée par une moyenne sur la distribution fournie par une orbite représentative pour chaque valeur de l'énergie [132], [133]. Une remarque importante qui découle de ce travail est que la taille des régions chaotiques était généralement sous-estimée dans la plupart des études précédentes.

En tout cas, les considérations suggérant la non-existence des orbites chaotiques dans les modèles galactiques étaient faites dans un cadre assez approximatif, sans avoir étudié profondément la dynamique de modèles en question. Donc, ces études étaient incapables de rendre compte de la complexité des systèmes en question. Ainsi, dans la plupart des analyses, la

méthode principale pour visualiser la dynamique du système était la construction des surfaces de section sur les plans principaux du mouvement, qui n'apportent que peu d'éclaircissement sur la dynamique du problème complet à 3 dimensions. Généralement, il est admis que l'addition d'un degré de liberté dans les problèmes à 2 dimensions doit augmenter la taille des régions chaotiques. Même dans ce cas, les méthodes utilisées comme les exposants de Lyapounov (voir [119], p. 312) sont des bien maigres indicateurs pour distinguer les orbites chaotiques des orbites régulières. Nous voyons clairement que certains problèmes de la dynamique galactique sont liés à la difficulté de clarifier la dynamique des systèmes à 3 degrés de liberté. Alors, il nous semble plus adéquate d'essayer d'abord d'étudier profondément la dynamique d'un potentiel galactique classique, afin d'avoir une base solide pour l'interprétation des problèmes mentionnés.

Dans ce travail notre démarche consiste à explorer la dynamique globale du système galactique choisi, en utilisant l'analyse en fréquence de Laskar [106], [107], [110]. En effet, Laskar a remarqué sur ces études sur la stabilité du système solaire [106], [107], qu'au lieu de chercher des variables d'actions adaptées pour simplifier la dynamique du système, on peut déterminer avec une grande efficacité un autre paramètre fixe des orbites du système, les **fréquences** fondamentales du mouvement. Dans le cas d'un système intégrable non-dégénéré, c.-à-d. où la torsion est différente de zéro :

$$\det \left(\frac{\partial^2 H_0(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{J}^2} \right) = \det \left(\frac{\partial \nu(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{J}} \right) \neq 0 \quad , \quad (1.10)$$

les fréquences sont une fonction difféomorphe des variables d'actions. On peut alors concevoir l'utilisation des fréquences comme un autre choix des variables. En outre, dans un système général, les fréquences approximées calculées par la méthode apparaissent comme une caractéristique plus naturelle du mouvement du système et elles sont déterminées avec une grande précision à l'aide des méthodes de Fourier raffinées [110].

Jusqu'à présent la méthode s'est révélée très robuste pour l'interprétation de la dynamique globale des systèmes compliqués, comme la dynamique chaotique du système solaire [107], [113], [112], la dynamique des accélérateurs des particules [62], [114], ou bien l'étude de la diffusion dans des problèmes à 3 degrés de liberté [108]. Le présent travail était aussi conçu comme un test sur la possibilité d'appliquer la méthode en dynamique galactique.

1.2 Contraintes observationnelles pour les galaxies elliptiques

Dans les paragraphes suivants, nous résumons quelques notions concernant la structure et la morphologie des galaxies elliptiques. Pour plus des détails on peut se référer à des articles de revue écrits par Binney [15], de Zeeuw et Franx [59], Merritt [128] et Gerhard [77] (dans l'ordre chronologique) et aux livres classiques de l'astronomie galactique de Mihalas et Binney [135] et de Binney et Tremaine [22], ainsi qu'au livre équivalent français de Combes *et al.* [31].

Les elliptiques sont les galaxies les plus simples, leur structure étant la plus régulière de toute la séquence de classification de Hubble. Elles sont des ensembles stellaires de population II, c.-à-d. leur vitesse de rotation est négligeable et elles sont formées par des étoiles froides, de métallicité faible, rouges, géantes et donc plus vieilles. Alors, elles ne possèdent pas ou très peu de gaz [77]. Elles doivent leur nom au fait que leurs isophotes (les lignes de luminosité surfacique égale) sont approximativement des ellipses concentriques (avec moins de 2% d'erreurs [77]). Pour classer les galaxies elliptiques par rapport à leur forme, au lieu d'utiliser le rapport axiale q des isophotes, qui varie entre 1 et 0.3, nous utilisons traditionnellement leur ellipticité

$\epsilon = 1 - q$ multipliée par 10 ($n = 10\epsilon$) et nous spécifions l'aplatissement par le symbole En . Alors les galaxies elliptiques les plus allongées sont du type E7. Cependant, la distribution des leurs ellipticités apparentes peut restreindre très faiblement la forme intrinsèque des galaxies elliptiques. De plus, du fait qu'on observe la distribution de leur luminosité en projection sur le ciel, il est impossible de déterminer directement si elles sont axisymétriques (des ellipsoïdes de révolution) ou triaxiales.

A part leur ellipticité, une autre caractéristique morphologique marquante des galaxies elliptiques est l'existence d'un noyau très brillant dans leur centre. En effet, leur luminosité surfacique décroît très rapidement avec le rayon et la différence de la distribution de luminosité entre les parties intérieures et extérieures est de l'ordre de 10^6 . On peut alors inférer qu'en général les galaxies elliptiques sont très inhomogènes. Leur luminosité présentant une individualité remarquable, nous utilisons plusieurs fonction pour l'évaluer quantitativement [77]. La grande majorité des luminosités surfaciques correspondant aux galaxies elliptiques les plus brillantes peut être représentée par une loi de puissance. Alors, deux lois empiriques classiques sont couramment évoquer pour ajuster les profils de luminosité :

- La loi de **De Vaucouleurs** [55], dite en $R^{1/4}$:

$$I(R) = I_e \exp \left(-7.67 \left(\left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right) \right) , \quad (1.11)$$

où I est l'intensité émise par unité de surface à la distance apparente R du centre, mesurée sur le ciel. La constante R_e représente le rayon contenant la moitié de la luminosité totale et I_e la luminosité surfacique à la distance $R = R_e$.

- La loi de **Hubble-Reynolds** [90], [161] :

$$\frac{I_H(R)}{I_0} = \left(\frac{R}{R_H} + 1 \right)^{-2} , \quad (1.12)$$

où I_0 est l'intensité par unité de surface au centre et R_H ce que nous appelons l'extension radiale qui est typiquement égale à $0.1R_e$.

Une autre formule, qui ne correspond pas très exactement aux observations photométriques, mais qui peut être très utile pour des calculs simples, est le profil modifié de Hubble:

$$\frac{I_{H_m}(R)}{I_0} = \left(\left(\frac{R}{R_{H_m}} \right)^2 + 1 \right)^{-1} , \quad (1.13)$$

où nous utilisons les mêmes notations comme pour la loi de Hubble-Reynolds. La distribution de luminosité est le paramètre observationnel qui peut fournir des indications permettant à étudier la structure et la dynamique des galaxies elliptiques. En supposant que le rapport masse/luminosité est constant avec le rayon (un sujet qui restent encore controversé [77]), on peut remonter à la fonction de densité de masse du modèle. Alors, en intégrant l'équation de Poisson (1.4), on peut déduire la forme du potentiel.

La vitesse de rotation de l'ensemble peut aussi contraindre le choix d'un potentiel. En effet, la vitesse tangentielle d'une étoile qui se déplace sur une orbite circulaire est :

$$v_c = \left(r \left| \frac{d\Phi}{dr} \right| \right)^{1/2} , \quad (1.14)$$

où Φ est le potentiel qui est supposé d’avoir une symétrie sphérique. Pourtant, la même relation peut être utilisée pour les orbites circulaires sur le plan équatoriale ($z = 0$) d’une galaxie représentée par un modèle avec des équipotentielles ellipsoïdales $\Phi = \Phi(r^2 + z^2/q^2)$, q étant le rapport entre les axes des ellipses. Pour les galaxies spirales, la courbe de rotation $v_c = v_c(R)$ est calculée par le décalage des raies d’émission dans les régions H II de la bande optique ou dans les longueurs d’onde radio, en utilisant la ligne d’émission de 21-cm de l’hydrogène neutre H I [31].

Le spectre des galaxies elliptiques étant dominé par la lumière provenant des étoiles vieilles, il ne contient pas, en général, des raies d’émission. Alors, la seule indication concernant les mouvements des étoiles provient des raies d’absorption élargies. Ces raies sont créées principalement par l’absorption des rayons lumineux sur les atmosphères des étoiles géantes et sont décalées par l’effet Doppler correspondant aux projections des vitesses des étoiles sur la ligne de visée. Les spectres intégrés représentent une contribution collective de toutes les étoiles suivant cette ligne. En première approximation la vitesse de rotation de l’ensemble est caractérisée par la position des raies sur les spectres tandis que la dispersion des vitesses est mesurée par la largeur du profil (pour plus de détails voir [31]). Néanmoins, les raies d’absorptions étant relativement faibles, il y a une grande difficulté pour obtenir des courbes de rotation pour les galaxies elliptiques. On n’est alors capable de mesurer que les profils de vitesses centrales : la luminosité surfacique décroissant rapidement, les mesures cinématiques pour des distances loin du centre sont très coûteuses en terme de temps d’utilisation des télescopes.

Les parties centrales des galaxies elliptiques sont très difficilement observables du sol, à cause de l’influence de la turbulence atmosphérique. A cause de l’effet de “seeing”, même si le vrai profil de luminosité centrale était une loi de puissance, on aurait observé un profil plat d’un noyau de luminosité surfacique constante [171]. Avec l’évolution de la photométrie CCD, il était possible de montrer que plusieurs galaxies elliptiques possèdent vraiment des noyaux dans leur centre [115], [100]. Récemment, les observations obtenues par le Télescope Spatiale de Hubble ont augmenté considérablement notre connaissance en ce qui concerne les noyaux des galaxies elliptiques. Il paraît que plusieurs entre eux ont des profils de luminosité surfacique au centre qui ne sont pas plats mais peuvent être approximés par des lois de puissance $r^{-\gamma}$ (des cusps, “cusps”) où γ varie entre 0 (complètement plat) et 2.5 [49], [71], [72], [116]. En effet, il existe une singularité entre le profil de luminosité extérieur et intérieur. Les noyaux représentés par les singularités les plus raides peuvent correspondre à des densités de masse très élevées. Dans ce cas, le système ne peut plus être considéré comme un ensemble dynamique sans collision et plusieurs processus fascinants peuvent rentrer en jeu, comme la ségrégation des étoiles massives vers le centre, l’effondrement du noyau, des collisions et du “merging” entre étoiles (pour un article de revus sur le sujet voir [78]).

Des modèles des profils de densité qui peuvent capturer les caractéristiques essentielles de la partie principale des galaxies elliptiques ainsi que de leurs noyaux sont les “modèles γ ” [51], [181] :

$$\rho(r) = \frac{(3 - \gamma)M}{4\pi a^3} \frac{a^4 r^{-\gamma}}{(r + a)^{4-\gamma}} . \quad (1.15)$$

Le modèle avec $\gamma = 3/2$ est la meilleure approximation connue du profil de luminosité de De Vaucouleurs (1.11). Une extension triaxiale des modèles γ était utilisées par Merritt et ses collaborateurs [132], [133] pour interpréter l’influence des singularités centrales dans la dynamique des galaxies elliptiques (voir aussi Section 1.1.3).

Il y a plusieurs indications que les galaxies elliptiques ont des formes triaxiales. D’abord, elles sont considérées comme des systèmes stellaires chauds, c.-à-d. la dispersion de vitesses est plus grande par rapport à la vitesse de rotation de l’ensemble. En effet, la valeur moyenne du rapport v/σ entre la vitesse de rotation et la dispersion des vitesses est de l’ordre de 0.2 pour les galaxies elliptiques brillantes. Leur rotation étant faible où inexistante, nous pouvons expliquer l’aplatissement de ces corps qu’avec l’anisotropie des vitesses [15], [59], [77]. Alors, il n’y a aucune raison que deux composantes du vecteur représentant l’ellipsoïde de vitesses de dispersion sont égales, pour que la symétrie axiale soit respectée (voir [31], p. 93). De plus, la triaxialité est évoquée pour expliquer le phénomène de la torsion des grands axes des isophotes (“isophote twists”, voir [135] pour des images descriptives). En effet, dans certaines galaxies les grands axes des différentes isophotes ne sont pas alignés. Cet effet peut être attribué proprement à la projection des configurations triaxiales sur le ciel (voir par exemple [32], [177], [11], [18]). Cependant, ces distorsions pourraient être réelles et dues à des effets de marée entre galaxies [31], [130].

Chapitre 2

Le Potentiel Logarithmique

Dans ce travail de thèse, nous étudierons le **potentiel logarithmique**, un modèle classique de la dynamique galactique, déjà utilisé dans plusieurs études ([162], [14], [163], [124], [16], [20], [164], [21], [125], [118], [61], [22], [136], [47], [148], [149], [117], [67], [68], [58]). Le grand nombre d'applications de ce modèle en dynamique galactique est dû en grande partie au fait que malgré sa simplicité, il est capable de reproduire la dynamique des galaxies elliptiques ou des halos galactiques, en première approximation.

Notre choix est justifié pour des raisons multiples. Tout d'abord, c'est un potentiel analytique, donc, assez simple à étudier du point de vue théorique et numérique. En outre, il représente un modèle galactique assez réaliste, et ainsi, nous pouvons l'utiliser pour examiner l'efficacité de l'analyse en fréquence en dynamique galactique. Nous étions aussi motivés par le fait que Binney et Spergel [20], [21] ont appliqué une méthode d'analyse de Fourier pour étudier les orbites générées par ce potentiel, ce qui nous permettra de comparer nos résultats avec leur travail.

2.1 Choix du potentiel

La forme des galaxies elliptiques ou des halos galactiques des spirales peut être approximée par des ellipsoïdes. Alors, une formule générale représentant leur potentiel gravitationnel est [68], [69] :

$$\Phi(r, z) = \frac{\Phi_0 R_c^\beta}{\left(r^2 + \frac{z^2}{q^2} + R_c^2\right)^{\beta/2}} \quad \text{avec } \beta \neq 0, \quad (2.1)$$

où (r, z) sont les coordonnées cylindriques habituelles. Le paramètre q est le rapport axial, Φ_0 est le potentiel au centre ($r = 0$) et R_c représente le rayon d'un noyau central. Ce potentiel est une loi de puissance du rayon d'un ellipsoïde de révolution $r_{el} = r^2 + z^2/q^2 + R_c^2$. Pour cette raison, on les appelle des **modèles à loi de puissance**. La vitesse des orbites circulaires sur le plan équatorial $z = 0$ (1.14) est :

$$v_c^2 = \frac{\beta \Phi_0 R_c^\beta r^2}{\left(r^2 + R_c^2\right)^{(\beta+2)/2}}. \quad (2.2)$$

Nous voyons clairement par l'équation précédente que pour des valeurs du rayon beaucoup plus grandes que R_c , la vitesse de rotation devient juste une loi de puissance :

$$v_c^2 = \frac{v_0}{r^\beta} . \quad (2.3)$$

Alors, pour $\beta > 0$ la courbe de rotation (2.2) chute asymptotiquement, tandis que pour $\beta < 0$, la courbe de rotation est croissante. Si maintenant $\beta = 0$, la relation (2.3) montre que la courbe de rotation est constante $v_c = v_0$, pour des distances $r \gg R_c$. En intégrant l'équation (1.14) on obtient :

$$\Phi(r, 0) = v_0^2 \ln r + \text{constante} . \quad (2.4)$$

Par conséquent, le modèle $\beta = 0$ qui manquait par la séquence des modèles de l'équation (2.1) est un potentiel logarithmique dont la forme est :

$$\Phi(r, z) = \ln \left(r^2 + \frac{z^2}{q^2} + R_c^2 \right) , \quad (2.5)$$

pour $v_0 = 1$. Le potentiel logarithmique doit sa popularité d'une grande partie au fait qu'il peut accorder avec la courbe de rotation plate des galaxies spirales pour des distances assez loin du centre, ceci étant une parmi les indications les plus directes de l'existence des halos massifs contenant de la matière noire (pour plus des détails voir [22], p. 598 et [31], p. 65).

En posant $R_c = 0$, le potentiel dévient "scale free" dans le sens qu'on peut obtenir sa valeur sur la position (sR, sz) par une loi d'échelle du type [162] :

$$\Phi(sR, sz) = \ln s + \Phi(R, z) . \quad (2.6)$$

Du fait de cette particularité, la dynamique du système hamiltonien généré par ce potentiel est indépendante de la valeur de l'énergie imposée (les équations du mouvement sont toujours invariantes par un changement d'échelle du type (2.6)). Miralda-Escudé et Schwarzschild [136] ont montré que la régularisation du potentiel "scale free", en ajoutant un noyau central de rayon R_c change substantiellement la dynamique du modèle, en prolongeant les résultats de Gerhard et Binney sur les singularités galactiques centrales [79]. En effet, alors que le potentiel logarithmique singulier peut être considéré comme modèle des halos massifs (voir [103], [170] pour une justification dynamique) sa version régularisée est plus adéquate pour modéliser les corps principaux des galaxies [118].

Une dernière remarque intéressante sur le potentiel logarithmique axisymétrique (2.5) est que, dans ce cas, on peut résoudre explicitement l'équation (1.5) [67], [92] et déterminer la partie paire f_+ de la fonction de distribution de densité $f = f_+ + f_-$ qui dépend de l'énergie H et du moment cinétique Θ le long de l'axe des z (les deux intégrales du mouvement) :

$$f_+(H, \Theta) = (A\Theta^2 + B) \exp(2H) + C \exp(H) , \quad (2.7)$$

où A, B, C sont des constantes qui dépendent des paramètres q, R_c et à la constante de la gravitation G [67]. Des propriétés observables correspondant à ce type des potentiels peuvent être calculées explicitement [69]. Finalement, on peut se référer à de Zeeuw, Evans et Schwarzschild [58] pour une discussion sur les propriétés observables du potentiel "scale free" qui peuvent correspondre à des fonctions de distribution f physiques.

Notre but étant d'étudier la dynamique des systèmes galactiques triaxiaux nous utilisons la forme tridimensionnelle du potentiel logarithmique [14] :

$$\Phi(r, z) = \ln \left(x^2 + \frac{y^2}{q_1^2} + \frac{z^2}{q_2^2} + R_c^2 \right) , \quad (2.8)$$

où x, y et z sont les coordonnées cartésiennes. Le potentiel (2.8) est une extension des modèles à loi de puissance, dont les équipotentiels sont des ellipsoïdes stratifiés avec deux rapports axiaux q_1 et q_2 [57]. De Zeeuw et Pfenniger [61] ont mis en évidence que le potentiel logarithmique triaxial ainsi que son limite “scale free” est un membre d’une large famille des couples potentiel-densité qui partagent quelques propriétés intéressantes avec les potentiels de Stäckel [175], [176]. Les potentiels de Stäckel, introduits pour la première fois en astronomie par Eddington [66], forment une rare classe des systèmes correspondants à des équipotentiels ellipsoïdes qui deviennent intégrables, quand on fait une transformation dans les coordonnées elliptiques de Jacobi.¹ Pour plus des détails on peut se référer aux travaux de Kuzmin [104], [105] et de Zeeuw [56].

2.2 La fonction de densité

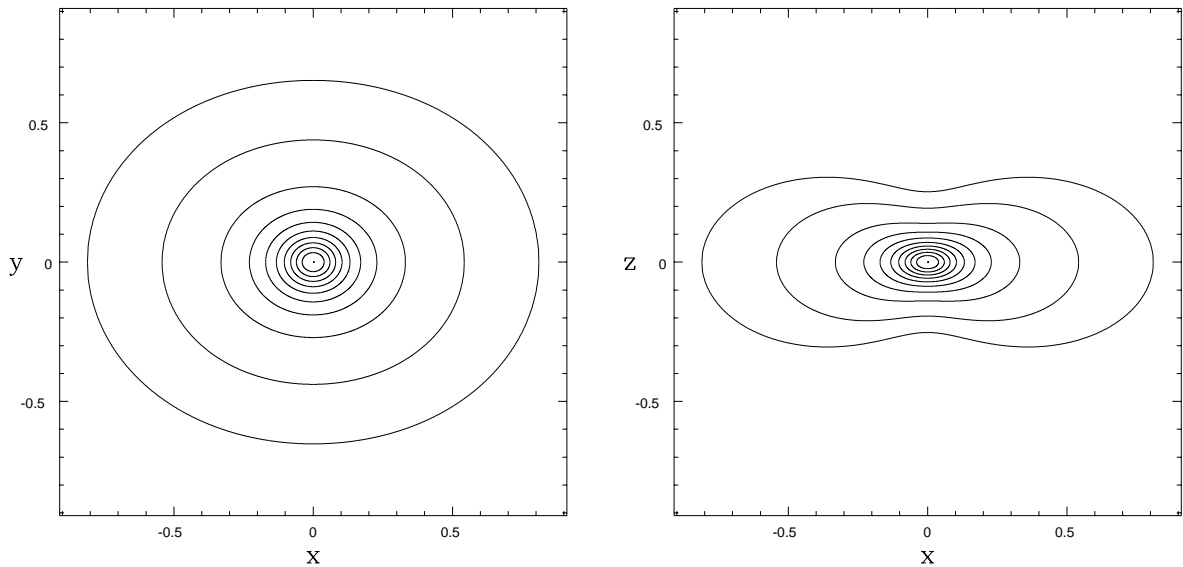


Figure 2.1 : Projections des surfaces de niveaux de la fonction de densité (2.9) sur les plans (x, y) et (x, z) de l’espace de configuration du système logarithmique pour des rapports axiaux $q_1 = 0.9$ et $q_2 = 0.7$

¹Comme dans le cas du problème des deux centres fixes en mécanique céleste [80]

En utilisant l'équation de Poisson (1.4), nous obtenons directement la **fonction de densité** qui peut reproduire le potentiel (2.8) :

$$\rho(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi G} \right) \frac{a_1 x^2 + a_2 \frac{y^2}{q_1^2} + a_3 \frac{z^2}{q_2^2} + a_4 R_c^2}{\left(x^2 + \frac{y^2}{q_1^2} + \frac{z^2}{q_2^2} + R_c^2 \right)^2}, \quad (2.9)$$

où les paramètres a_1, a_2, a_3, a_4 sont des fonctions de q_1 et q_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= -1 + q_1^{-2} + q_2^{-2} \\ a_2 &= 1 - q_1^{-2} + q_2^{-2} \\ a_3 &= 1 + q_1^{-2} - q_2^{-2} \\ a_4 &= 1 + q_1^{-2} + q_2^{-2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pour des distances loin du centre la fonction de densité est proportionnelle à r_{el}^{-2} , qui correspond à plusieurs galaxies, comme la galaxie naine M32 de la Figure 2.2 (voir par exemple [180], [183], [52], [74]).

2.2.1 Rapports axiaux des surfaces de niveaux de densité

Comme nous avons mentionné ci-dessus, les paramètres q_1 et q_2 représentent les rapports axiaux des équipotentielles. Cependant, on peut voir directement par l'équation (2.9) que les surfaces de densité égale sont relativement plus plates et divergent de la configuration ellipsoïdale lorsque les rapport axiaux sont différents de 1 [14]. Sur la Figure 2.1, nous traçons les surfaces de niveaux projetées sur chaque plan de l'espace de configuration (x, y, z) , pour des valeurs des paramètres $q_1 = 0.9$ et $q_2 = 0.7$.

En effet, on peut déterminer des rapports axiaux approximatifs des surfaces de niveaux de densité en calculant les valeurs des variables spatiales où la surface coupe les axes x, y et z , respectivement, et en prenant leurs rapports. En annulant successivement deux parmi les trois valeurs des variables spatiales dans l'équation de la fonction de densité (2.9), nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \rho(x_m, 0, 0) &= \frac{a_1 x_m^2 + a_4 R_c^2}{(x_m^2 + R_c^2)^2} \\ \rho(0, y_m, 0) &= \frac{a_2 y_m^2 / q_1^2 + a_4 R_c^2}{(y_m^2 / q_1^2 + R_c^2)^2} \\ \rho(0, 0, z_m) &= \frac{a_3 z_m^2 / q_2^2 + a_4 R_c^2}{(z_m^2 / q_2^2 + R_c^2)^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Alors, en résolvant les équations (2.11) par rapport à x_m, y_m, z_m , et en prenant les rapports

entre x_m et y_m, z_m on a :

$$\begin{aligned} \frac{y_m}{x_m} &= q_1 \sqrt{\frac{a_2 - 2\rho R_c^2 + \sqrt{a_2^2 + 4\rho R_c^2(a_4 - a_2)}}{a_1 - 2\rho R_c^2 + \sqrt{a_1^2 + 4\rho R_c^2(a_4 - a_1)}}} \\ \frac{z_m}{x_m} &= q_2 \sqrt{\frac{a_3 - 2\rho R_c^2 + \sqrt{a_3^2 + 4\rho R_c^2(a_4 - a_3)}}{a_1 - 2\rho R_c^2 + \sqrt{a_1^2 + 4\rho R_c^2(a_4 - a_1)}}} . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Malheureusement, ces rapports ne sont pas uniques, c.-à-d. ils sont paramétrés par la valeur de la surface de niveaux considérée. Nous sommes capables pourtant de donner des rapports axiaux approximatés, en divisant les deux dernières équations du système (2.11) par la première et en posant $x_m, y_m, z_m \gg R_c$:

$$\frac{y_m}{x_m} \approx q_1 \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \text{ et } \frac{z_m}{x_m} \approx q_2 \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} , \quad (2.13)$$

et pour $x_m, y_m, z_m \ll R_c$:

$$\frac{y_m}{x_m} \approx q_1 \sqrt{\frac{b_1}{b_2}} \text{ et } \frac{z_m}{x_m} \approx q_2 \sqrt{\frac{b_1}{b_3}} , \quad (2.14)$$

où $b_i = a_i - 2a_4$, pour $i = 1, \dots, 3$. Dans ces relations nous avons considéré que $x_m \geq y_m \geq z_m$ pour $1 \geq q_1 \geq q_2$ mais des relations équivalentes peuvent être établies pour les autres cas des rapports axiaux.

Notons que, c'est à travers les rapports axiaux des isophotes externes qu'on définit l'ellipticité des galaxies elliptiques. C'est pourquoi que nous pourrions obtenir des estimations plus proche de ce qu'on observe en calculant les rapports axiaux de la surface de densité externe. Il suffit alors de trouver la surface de densité qui correspond à une valeur :

$$\rho_k = \frac{a_k \exp(h) + R_c^2(a_4 - a_k)}{\exp(2h)} , \quad (2.15)$$

où $k = 1, \dots, 3$ et ρ_1, ρ_2 et ρ_3 correspondent aux valeurs minimales de la densité sur l'axe x, y et z , respectivement. En effet, nous pouvons facilement voir que suivant les valeurs des paramètres q_1 et q_2 nous pouvons désigner la valeur de ρ_k la plus grande parmi les trois, qui caractérise la surface de densité égale externe (voir aussi [117]). Comme dans les paragraphes précédents, en supposant que $1 \geq q_1 \geq q_2$ nous pouvons substituer les valeurs de la densité dans les équations (2.12) et donner des meilleurs estimations sur les rapports axiaux :

$$\begin{aligned} \frac{y_m}{x_m} &= q_1 \sqrt{\frac{a_2 - 2\rho_1 R_c^2 + \sqrt{a_2^2 + 4\rho_1 R_c^2(a_4 - a_2)}}{2\rho_1 (\exp(h) - R_c^2)}} \\ \frac{z_m}{x_m} &= q_2 \sqrt{\frac{a_3 - 2\rho_1 R_c^2 + \sqrt{a_3^2 + 4\rho_1 R_c^2(a_4 - a_3)}}{2\rho_1 (\exp(h) - R_c^2)}} . \end{aligned} \quad (2.16)$$

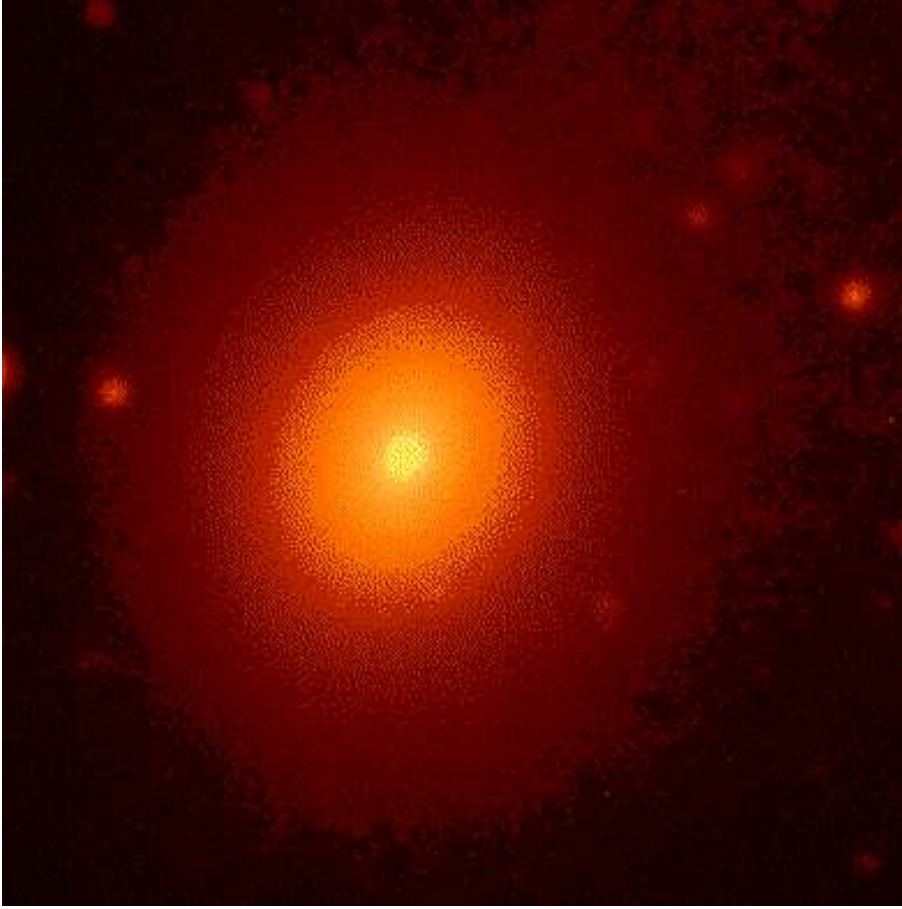


Figure 2.2 : Image de la galaxie elliptique M32

Les notations couramment employées dans la dynamique galactique pour les rapports axiaux sont c/a et b/a , avec la convention que $a \geq b \geq c$. A partir de rapports axiaux nous pouvons définir le paramètre de triaxialité [73] :

$$T_p = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} , \quad (2.17)$$

qui caractérise l'aplatissement du modèle choisi : quand T_p tend vers zéro le modèle est aplati ("oblate"), tandis que quand le paramètre tend vers 1 le modèle est allongé ("prolate"). En utilisant les approximations des rapports axiaux données par les équations (2.13) et (2.13), nous pouvons calculer des paramètres de triaxialité approximatifs. D'abord en posant $x_m, y_m, z_m \gg R_c$:

$$T_p \approx \frac{1 - q_1^2}{1 - q_2^2} , \quad (2.18)$$

et pour $x_m, y_m, z_m \ll R_c$:

$$T_p \approx \frac{1 - q_1^2}{1 - q_2^2} \frac{3Q^4 + 4Q^2q_1^2 - 4q_1^4}{3Q^4 + 4Q^2q_2^2 - 4q_2^4} , \quad (2.19)$$

où $D^2 = q_1^2 + q_1^2 q_2^2 + q_2^2$. Finalement nous donnons aussi l'estimation optimale du paramètre de triaxialité en utilisant les équations (2.16) :

$$T_p = \frac{2\rho_1 \exp(h) - a_2 - \sqrt{a_2^2 + 4\rho_1 R_c^2(a_4 - a_2)}}{2\rho_1 \exp(h) - a_3 - \sqrt{a_3^2 + 4\rho_1 R_c^2(a_4 - a_3)}} , \quad (2.20)$$

où les a_i sont données par l'équation (2.10).

2.2.2 Espace des valeurs admissibles des rapports axiaux

Dans la grande majorité des études il semblait convenable de poser $1 \geq q_1 \geq q_2$. Dans ce travail, cependant, nous préférons avoir la liberté de donner aux rapports axiaux des valeurs quelconques dans \mathbb{R}_+^* . En général, ces paramètres respectent certaines conditions pour que la fonction de densité de l'équation (2.9) soit positive partout dans \mathbb{R}^3 et que le modèle conserve son sens physique. En première approximation (voir le travail de de Zeeuw et Pfenniger [61]), on peut vérifier par l'équation (2.9), que la densité est positive, pour $q_2 \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ et :

$$q_1 \in \left(\frac{q_2}{\sqrt{1 + q_2^2}}, \frac{q_2}{\sqrt{|1 - q_2^2|}} \right) . \quad (2.21)$$

2.3 Structure hamiltonienne

Nous considérons le système hamiltonien engendré par le potentiel logarithmique triaxial (2.8) :

$$H_{q_1, q_2}(x, y, z, X, Y, Z) = \frac{1}{2} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \ln \left(x^2 + \frac{y^2}{q_1^2} + \frac{z^2}{q_2^2} + R_c^2 \right) , \quad (2.22)$$

où (X, Y, Z) représentent les moments conjugués aux variables (x, y, z) , respectivement. Le hamiltonien est une fonction à deux paramètres q_1, q_2 définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Le système différentiel associé est :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X \\ \dot{y} &= Y \\ \dot{z} &= Z \\ \dot{X} &= \frac{-2x}{r_l(x, y, z)} , \\ \dot{Y} &= \frac{-2y}{q_1^2 r_l(x, y, z)} \\ \dot{Z} &= \frac{-2z}{q_2^2 r_l(x, y, z)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

où $r_l(x, y, z) = \left(x^2 + \frac{y^2}{q_1^2} + \frac{z^2}{q_2^2} + R_c^2 \right)$. Dans cette étude nous choisirons une valeur arbitraire de l'énergie ($h = -0.40589$) et les rapports axiaux q_1 et q_2 joueront le rôle des paramètres de

perturbation. Suivant des études précédentes [20] le paramètre de régularisation R_c est fixé à 0.1.

Afin d'étudier profondément la dynamique du système logarithmique nous allons essayer d'abord de tirer plusieurs informations en examinant la forme du hamiltonien (2.22). Une première remarque élémentaire est que l'espace des phases généré par le système logarithmique respecte des symétries de réflexion par rapport aux axes x, y, z, X, Y et Z .

En outre, l'espace des phases du système est un compact : chaque variable atteint sa valeur maximale quand toutes les autres s'annulent. Les valeurs maximales des vitesses sont les mêmes pour les trois variables :

$$X_{max} = Y_{max} = Z_{max} = \sqrt{2h - 2\ln(R_c^2)} . \quad (2.24)$$

Les valeurs maximales des positions, cependant, dépendent des rapport axiaux :

$$\begin{aligned} x_{max} &= \sqrt{\exp(h) - R_c^2} \\ y_{max} &= q_1 \sqrt{\exp(h) - R_c^2} \\ z_{max} &= q_2 \sqrt{\exp(h) - R_c^2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Suivant le rapport entre les valeurs maximales des variables de position nous appelons les axes de l'espace de configuration petit, moyen et grand axe.

La région de Hill du système, c.-à-d. la projection des surfaces d'énergie $H_{q_1, q_2} = h = \text{constante}$ sur l'espace de configuration (x, y, z) , a une forme assez simple. En effet, lorsque $h > \ln(R_c^2)$, la région de Hill est un ellipsoïde borné par la courbe de vitesses nulles ($X = Y = Z = 0$) :

$$x^2 + \frac{y^2}{q_1^2} + \frac{z^2}{q_2^2} = \exp(h) - R_c^2 \geq 0 . \quad (2.26)$$

D'autre part, pour $h > \ln(R_c^2)$, nous voyons clairement par l'équation (2.26) que le mouvement ne peut pas avoir lieu (la région de Hill est vide). Dans le cas $h = \ln(R_c^2)$, la région de Hill dégénère à un point fixe : $(x, y, z, X, Y, Z) = \mathbf{0}$. Notons que les six valeurs propres du système symplectique (2.23), linéarisé au voisinage du point fixe, sont égales à $\pm i\sqrt{2}/R_c, \pm i\sqrt{2}/(q_1 R_c), \pm i\sqrt{2}/(q_2 R_c)$ et, par conséquent, le point est de nature elliptique (linéairement stable).

De la même façon, comme pour l'espace de configuration, l'espace des vitesses est borné entre 0 et une valeur maximale :

$$2h - 2\ln(R_c^2) \geq X^2 + Y^2 + Z^2 \geq 0 . \quad (2.27)$$

Le système possède 3 degrés de liberté. Alors, en première vue, il n'est pas intégrable, la seule intégrale évidente étant l'énergie (2.22). Néanmoins, pour des valeurs spécifiques des variables et des paramètres, le système devient intégrable. Ces cas spéciaux peuvent nous aider dans l'analyse de la dynamique du système complet.

2.3.1 Cas associés à des mouvements rectilignes

Nous pouvons observer directement par les équations du mouvement (2.23) du système que les plans $(x, X), (y, Y)$ et (z, Z) sont invariants par le flot hamiltonien (toutes les orbites qui

prennent leurs conditions initiales sur ces plans restent sur les plans). La restriction du système sur un de ces plans constitue un système hamiltonien à 1 degré de liberté. En appliquant une transformation sur les variables de position et en changeant l'échelle du temps, nous pouvons exprimer les trois systèmes avec le même hamiltonien [167] :

$$H_0 = \frac{1}{2}P^2 + \ln(p^2 + R_c^2) \quad , \quad (2.28)$$

où (p, P, τ) correspondent à (x, X, t) , $(y/q_1, Y, t/q_1)$ et $(z/q_2, Z, t/q_2)$, pour chaque cas, respectivement. Ces systèmes préservent toutes les caractéristiques principales du hamiltonien général (2.22) (convexité, symétries par réflexion, etc.). Leur espace des phases est rempli par des orbites périodiques paramétrées par la valeur de l'énergie correspondante (voir Figure 2.3). Dans l'espace de configuration, ces orbites oscillent sur des lignes droites, le long de l'axe p correspondant. Suivant la “taille” de l'axe sur lequel elles se déplacent nous les appelons **petite**, **moyenne** et **grande orbites axiales**.

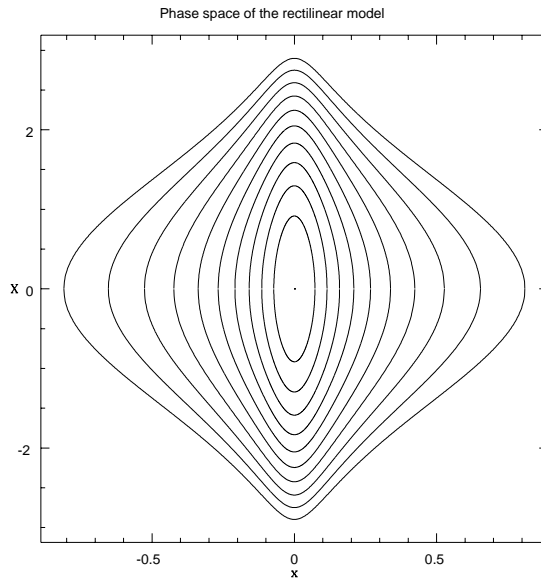


Figure 2.3 : Espace des phases du système à 1 degré de liberté sur le plan (x, X)

Analyse de stabilité

L'existence de ces orbites périodiques dans l'espace des phases du système complet est très importante pour sa dynamique. Pour dévoiler le comportement de ces orbites périodiques particulières dans le système général, nous effectuerons une analyse de stabilité linéaire, suivant la théorie de Floquet-Lyapounov [70], [122], en variant les deux paramètres q_1, q_2 . Une telle analyse, en utilisant une approche perturbative du type Poincaré-Lindstedt [120], [156], [187] (pour une exposition compréhensive voir [184]), était déjà appliquée pour les orbites rectilignes du système logarithmique plan par Scuffaire [167]. Ici, plutôt, nous nous appuyons sur une application numérique de la théorie de Floquet-Lyapounov. Une étude similaire, mais en utilisant la valeur de l'énergie comme paramètre de perturbation, était effectuée par Magnenat [124]. Dans

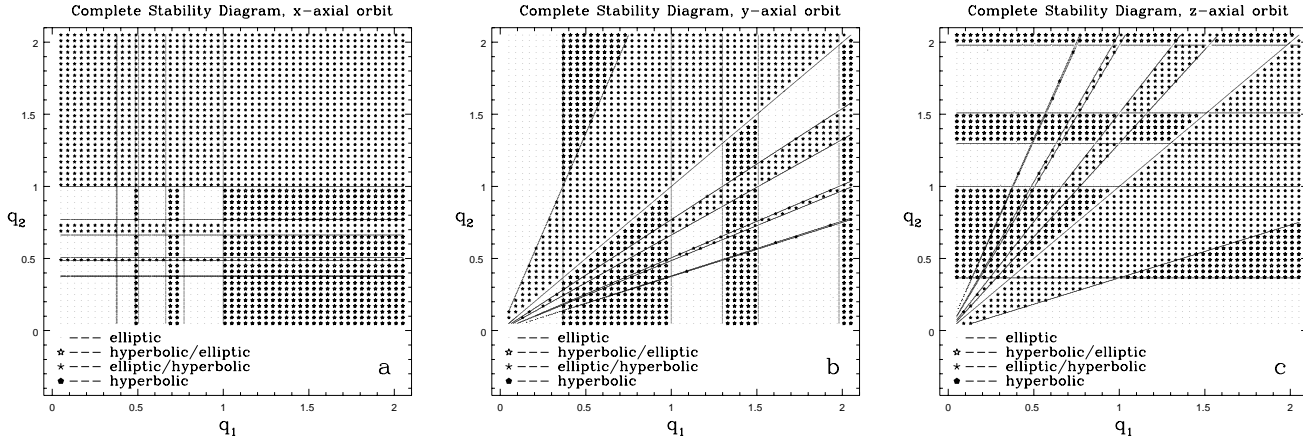


Figure 2.4 : Diagrammes de stabilité complètes sur le plan formé par les paramètres de perturbation (q_1, q_2) (a) orbite périodique x -axiale (b) orbite périodique y -axiale et (c) orbite périodique z -axiale

les paragraphes qui suivent nous exposerons brièvement l'application de la théorie de Floquet-Lyapounov dans un contexte hamiltonien, qui remonte aux études de Poincaré [156]. La plupart des propositions mathématiques énoncées ci-dessous peuvent être trouvées regroupées dans le livre d'introduction sur les systèmes hamiltoniens de Meyer et Hall [134] ou dans des livres spécialisés sur les équations différentielles à coefficients périodiques (voir par exemple [190]).

En linéarisant le système différentiel (2.23) au voisinage de chaque orbite périodique $(x_0(t), X_0(t), 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, y_0(t), Y_0(t), 0, 0)$ et $(0, 0, 0, 0, z_0(t), Z_0(t))$ nous tombons sur trois systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= X & \dot{x} &= X & \dot{x} &= X \\
 \dot{y} &= Y & \dot{y} &= Y & \dot{y} &= Y \\
 \dot{z} &= Z & \dot{z} &= Z & \dot{z} &= Z \\
 \dot{X} &= \frac{-2x}{x_0^2 + R_c^2} \Xi_{x_0} & \dot{X} &= \frac{-2q_1^2 x}{y_0^2 + q_1^2 R_c^2} & \dot{X} &= \frac{-2q_2^2 x}{z_0^2 + q_2^2 R_c^2} \\
 \dot{Y} &= \frac{-2y}{q_1^2(x_0^2 + R_c^2)} & \dot{Y} &= \frac{-2y}{y_0^2 + q_1^2 R_c^2} \Xi_{y_0} & \dot{Y} &= \frac{-2q_2^2 y}{q_1^2(z_0^2 + q_2^2 R_c^2)} \\
 \dot{Z} &= \frac{-2z}{q_2^2(x_0^2 + R_c^2)} & \dot{Z} &= \frac{-2q_1^2 z}{q_2^2(y_0^2 + q_1^2 R_c^2)} & \dot{Z} &= \frac{-2y}{z_0^2 + q_2^2 R_c^2} \Xi_{z_0}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

où les expressions Ξ_{x_0} , Ξ_{y_0} et Ξ_{z_0} sont des fonctions des orbites périodiques :

$$\Xi_{x_0} = \left(1 - \frac{2x_0^2}{x_0^2 + R_c^2}\right), \quad \Xi_{y_0} = \left(1 - \frac{2y_0^2}{y_0^2 + q_1^2 R_c^2}\right) \quad \text{et} \quad \Xi_{z_0} = \left(1 - \frac{2z_0^2}{z_0^2 + q_2^2 R_c^2}\right) .$$

Le théorème de Floquet-Lyapounov énonce que pour un système linéaire des n équations différentielles à coefficients périodiques :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} , \tag{2.30}$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est continue et T -périodique, ils existent des solutions dont la forme est :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \exp(\mathbf{K}t) \mathbf{P}(t) , \quad (2.31)$$

où $\mathbf{P}(t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est T -périodique et \mathbf{K} une matrice constante. La matrice $\mathbf{\Omega} = \exp(\mathbf{K}T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est appelée matrice de monodromie du système et joue un rôle fondamental pour la stabilité des solutions. En effet, le théorème affirme que les solutions du système sont des termes T -périodiques et des polynômes du temps t multipliés par $\exp(\kappa_i t)$, où κ_i ($i = 1, \dots, n$) sont les valeurs propres de la matrice \mathbf{K} . Alors, suivant la nature de ces valeurs propres, on peut étudier la stabilité des solutions du système (2.30). La connaissance directe de la matrice \mathbf{K} qui est nécessaire pour calculer ensuite ses valeurs propres, n'est pas évidente. Cependant, nous pouvons remarquer que les valeurs propres λ de la matrice de monodromie (qu'on appelle des multiplicateurs caractéristiques) s'expriment comme $\lambda = \exp(\kappa T)$ et, par conséquent, il suffit de calculer cette matrice pour tester la stabilité du système. Pour construire la matrice de monodromie, nous écrivons d'abord la solution du système pour $t = 0$:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \mathbf{P}(0) , \quad (2.32)$$

et, comme $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, nous avons que $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ où \mathbf{I} est la matrice identité $n \times n$. Pour t égale à une période T , la solution du système s'écrit :

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0 \exp(\mathbf{K}T) \mathbf{P}(T) . \quad (2.33)$$

Comme $\mathbf{P}(t)$ est T -périodique, $\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$. Alors, la matrice de monodromie est

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{x}(T) \cdot \mathbf{x}_0^{-1} . \quad (2.34)$$

Il paraît donc nécessaire pour calculer $\mathbf{\Omega}$ de choisir n solutions linéairement indépendantes et trouver la solution du système pour $t = T$. Toutefois, dans notre cas, le système d'équations linéarisé au voisinage des orbites périodiques ne peut pas être résolu analytiquement. En dépit du fait qu'il y a des moyens théoriques, suivant une théorie de matrices aléatoires introduite par Dyson dans la mécanique quantique [63], [64], [65] (voir [10] et [160] pour plus de détails), avec lesquelles on peut avoir des estimations analytiques sur la forme de la matrice de monodromie au temps $t = T$, nous préférons utiliser des intégrations numériques, qui fonctionnent très bien dans ce cas.

Alors, nous intégrons numériquement 6 conditions initiales linéairement indépendantes, correspondant aux colonnes de la matrice identité \mathbf{I} , pour une période de l'orbite périodique en question (nous utilisons la méthode élégante proposée par Hénon pour préciser la période exacte). L'intégration numérique est effectuée à l'aide d'un intégrateur de Runge-Kutta de 7/8ème ordre avec des pas variables, basé sur les formules de Prince et Dormand [159] (la routine Dopri8 est donnée par Hairer *et al.* [83]), qui assure une précision de l'ordre de 10^{-12} , sur l'estimation de la valeur de l'énergie. Alors, nous construisons la matrice des solutions du système qui, dans ce cas, est égale à la matrice de monodromie (2.34).

Il faut souligner que dans le cas hamiltonien on peut prouver que la matrice de monodromie est symplectique (voir [134], p. 36) :

$$\mathbf{\Omega}^T \mathbf{J} \mathbf{\Omega} = \mathbf{J} , \quad (2.35)$$

où $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Pour des systèmes hamiltoniens autonomes comme celui que nous étudions, une valeur propre de la matrice de monodromie est toujours égale à $+1$ étant donné que la

direction le long de l'orbite périodique est dégénérée (une perturbation suivant cette direction n'influence pas l'orbite). A cause de la structure symplectique de la matrice, on peut prouver que son polynôme caractéristique est réciproque et, alors, si λ est une valeur propre, λ , λ^{-1} , $\bar{\lambda}$ et $\bar{\lambda}^{-1}$ sont aussi des valeurs propres. Alors, la multiplicité algébrique de la valeur propre $+1$ sera paire et, donc, au moins 2. Cette dernière remarque provient simplement du fait qu'un système hamiltonien autonome a toujours au moins une intégrale.² En outre, le polynôme caractéristique doit être symétrique. En utilisant le fait que deux valeurs propres sont égales à $+1$, on peut écrire le polynôme réduit pour un système à 3 degrés de liberté [26] :

$$\lambda^4 - A\lambda^3 + B\lambda^2 - A\lambda + 1 = 0 \quad , \quad (2.36)$$

où $A = \text{Tr}(\Omega)$ et $2B = \text{Tr}(\Omega)^2 - \text{Tr}(\Omega^2)$. Des relations équivalentes mais plus compliquées peuvent être établies pour les polynômes caractéristiques des orbites périodiques dans des systèmes jusqu'à 5 degrés de liberté [89]. Le polynôme caractéristique (2.36) peut être factorisé à deux polynômes :

$$(\lambda^2 - \mu_1\lambda + 1)(\lambda^2 - \mu_2\lambda + 1) = 0 \quad , \quad (2.37)$$

où μ_1, μ_2 sont les racines de l'équation

$$\mu^2 - A\mu + B - 2 = 0 \quad , \quad (2.38)$$

et $\mu = \lambda + 1/\lambda$. La stabilité linéaire de l'orbite est déterminée complètement par μ_1, μ_2 et le discriminant $\Delta = 4(A^2/4 - B + 2)^{1/2}$ de l'équation (2.38). Si $\Delta < 0$, toutes les valeurs propres sont complexes et ne se trouvent pas sur le cercle d'unité définie par $|\lambda| = 1$, dans le plan $(\Re(\lambda), \Im(\lambda))$. Dans ce cas, l'orbite est instable (hyperbolique) complexe. D'autre part, si $\Delta > 0$ et $|\mu_1| > 2$ ou/et $|\mu_2| > 2$ l'orbite est instable dans l'une ou dans toutes les deux directions. Le seul cas qui mène à une stabilité linéaire de l'orbite est pour $\Delta > 0$ et $|\mu_1|, |\mu_2| < 2$. Il faut souligner que suivant le théorème de Hartman-Grobman (pour la preuve et des références voir [151] p. 118), dans le cas hyperbolique, le système complet (non-linéaire) aura le même comportement. Au contraire dans le cas elliptique (stabilité linéaire), on peut donner des exemples des systèmes différentiels où les termes non-linéaires d'ordre supérieur, qui sont négligés à cause de la linéarisation, peuvent changer le comportement du système complet (voir [151], p. 140).

Le cas de l'instabilité complexe est intéressant, son apparition étant possible seulement dans des systèmes à 3 degrés de libertés et plus (pour une revue voir [40]). Le théorème de Krein-Moser [101], [102], [139] énonce les conditions nécessaires pour que les valeurs propres du système linéarisé quitte le cercle d'unité. Néanmoins, dans le cas des orbites rectilignes du système logarithmique, l'instabilité complexe ne peut pas apparaître [124]. On peut vérifier que les systèmes différentiels linéarisés aux voisinages des orbites périodiques rectilignes se composent des trois couples d'équations indépendantes avec des coefficients périodiques (voir les systèmes d'équations (2.29)). Donc, la matrice de monodromie réduite (en éliminant les lignes qui correspondent aux valeurs propres $+1$) peut être écrite sous la forme de bloc :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.39)$$

²Le gradient du hamiltonien $\nabla H(\xi)$ sur une orbite T -périodique $x(T, \xi) = \xi$ est un vecteur propre gauche de la matrice de monodromie correspondant à la valeur propre $+1$

Par conséquent, le système linéarisé est décomposé dans deux systèmes en 2 dimensions non-couplés, dont les valeurs propres ne deviennent jamais complexes. En effet, dans ce cas, les deux indices de stabilité μ_1 et μ_2 sont identifiées par les traces des sousmatrices Ω_1 et Ω_2 , respectivement. Elle désignent la stabilité paramétrique suivant les deux directions perpendiculaires à l'orbite périodique (dans l'espace de configuration).

Nous avons calculé, au moyen de l'approche numérique que nous avons exposé dans les paragraphes précédents, les indices de stabilité μ_1 et μ_2 , pour plusieurs valeurs des paramètres q_1 et q_2 (non seulement pour les valeurs "physiques"). Sur la Figure 2.4, nous représentons les diagrammes de stabilité complets dans le plan (q_1, q_2) , pour chaque orbite rectiligne. Ces derniers diagrammes sont appelés des "diagrammes d'existence" [45], [148], pour la raison évidente qu'ils montrent aussi les régions des paramètres pour lesquelles ces orbites existent. Dans notre cas, cependant, les orbites rectilignes existent pour toutes valeurs de $q_1, q_2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Ces diagrammes séparent le plan (q_1, q_2) dans 4 régions selon les valeurs des indices de stabilité : les points gras désignent l'instabilité double, les deux semi-instabilités sont représentées par les deux types d'étoiles, tandis que la stabilité linéaire est représentée par les points fins. Les traies pleins représentent des cas pour lesquels l'orbite est en transition c.-à-d. quand une des indices de stabilité surpasse les paliers d'(in)stabilité ± 2 . Dans notre cas, nous pouvons observer que les indices de stabilité ne deviennent jamais inférieurs à -2 , et alors, les lignes de transition représentent toutes les valeurs de q_1, q_2 pour lesquelles l'orbite est dégénérée dans une ou dans les deux directions (l'intersection des lignes). Ces lignes désignent les valeurs exactes des q_1 et q_2 pour lesquelles, les orbites rectilignes bifurquent en générant des orbites périodiques d'une période plus élevée.

Du fait de l'invariance des équations linéarisées en interchangeant les rapports axiaux, le diagramme de stabilité de l'orbite périodique oscillant le long de l'axe des x est symétrique par rapport à la diagonale $q_1 = q_2$, et les deux autres diagrammes sont identiques en interchangeant ces axes. De plus, dans le cas de l'orbite x -axiale, les bords de transition sont des lignes verticales et horizontales dans le plan (q_1, q_2) , du fait que chaque couple d'équations linéarisées, définissant les indices de stabilité, dépend d'un seul paramètre de perturbation. Dans les deux autres cas, seulement les équations différentielles de (x, X) dépendent d'un paramètre de perturbation. C'est pour cette raison que les lignes de transition sont des lignes verticales sur l'axe de q_1 pour l'orbite y -axiale et sur l'axe des q_2 pour l'orbite périodique z -axiale. Finalement, pour $q_1 = 1$ ou $q_2 = 1$ ou $q_1 = q_2$ les orbites sont dégénérées. Dans ces derniers cas les systèmes associés préservent encore une intégrale (une composante du moment cinétique - voir Section 2.3.3).

Nous pouvons remarquer, finalement, que pour la plupart des valeurs des paramètres de perturbation, l'orbite qui oscille le long du petit axe est hyperbolique. Cette dernière instabilité est en accord avec quelques considérations analytiques de Binney [14], pour un modèle galactique général. Alors, ce résultat était évoqué comme l'indication principale que les régions irrégulières doivent être limitées au voisinage de cette orbite. Cette dernière remarque peut être justifiée dans le cas d'un système à 2 degrés de liberté (voir Chapitre 3). Cependant, dans le cas d'un système à 3 degrés de liberté, nous verrons dans le Chapitre 4 que la situation est plus compliquée.

2.3.2 Cas sphérique

En posant les rapports axiaux q_1 et q_2 égaux à 1, le hamiltonien du système devient :

$$H_{11}(x, y, z, X, Y, Z) = \frac{1}{2} (X^2 + Y^2 + Z^2) + \ln (x^2 + y^2 + z^2 + R_c^2) . \quad (2.40)$$

Pour démontrer l'intégrabilité de ce système nous devons faire une transformation canonique des variables (x, y, z, X, Y, Z) aux variables $(r, \theta, \phi, R, \Theta, \Phi)$, où les nouvelles variables des positions sont les coordonnées sphériques : $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $\theta = \arctan(y/x)$ et $\phi = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z)$ où $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ avec (R, Θ, Φ) leurs moments conjugués. Le hamiltonien du système s'écrit comme une fonction des nouvelles variables :

$$H(r, \theta, \phi, R, \Theta, \Phi) = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2 \sin^2 \phi} + \frac{\Phi^2}{r^2} \right) + \ln (r^2 + R_c^2) , \quad (2.41)$$

et les équations du mouvement associées :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= R \\ \dot{\theta} &= \frac{\Theta}{r^2 \sin^2 \phi} \\ \dot{\phi} &= \frac{\Phi}{r^2} \\ \dot{R} &= \frac{1}{r^3} \left(\frac{\Theta^2}{\sin^2 \phi} + \Phi^2 \right) - \frac{2r}{r^2 + R_c^2} \\ \dot{\Theta} &= 0 \\ \dot{\Phi} &= \frac{\Theta^2 \cos \phi}{r^2 \sin^3 \phi} \end{aligned} . \quad (2.42)$$

Le hamiltonien (2.41) représente un cas classique d'un système avec une symétrie sphérique où on peut retrouver deux intégrales du mouvement de plus à part l'énergie (voir par exemple [80], p. 70). En effet, nous voyons facilement par les équations du mouvement (2.42) que la composante du moment cinétique L_z parallèle à la direction des z , représentée par la variable Θ , est une intégrale du mouvement. Eventuellement, la quantité $\Phi^2 + \Theta^2 / \sin^2 \phi$, représentant le carré de l'amplitude du vecteur du moment cinétique total \mathbf{L} , complète le triplet des intégrales indépendantes. A cause de la conservation du moment cinétique total, l'espace de configuration de ces systèmes est rempli par des orbites planes qui sont centrées à $r = 0$, les fameuses rosettes (Figure 2.5a).

Un problème commun qu'on envisage quand on effectue une transformation en coordonnées sphériques est l'introduction de la singularité à $r = 0$. Pour détruire cette singularité nous pouvons utiliser la régularisation de McGehee (voir [126] et aussi [54] pour une revue sur les singularités en mécanique classique). En effet, nous introduisons un changement de variables qui nous fait passer des variables (R, L) aux nouvelles variables (Υ, Ψ) . En même temps, on

utilise une nouvelle paramétrisation temporelle, en introduisant la variable τ :

$$\begin{aligned}\Upsilon &= r^a R \\ \Psi &= r^b L \quad , \\ dt &= r^c d\tau\end{aligned}\tag{2.43}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$. Dans notre cas, nous posons $(a, b, c) = (1, 0, 2)$ et l'équation de conservation du hamiltonien s'écrit :

$$r^2 h_0 = \frac{1}{2}(\Upsilon^2 + \Psi^2) + r^2 \ln(r^2 + R_c^2) \quad .\tag{2.44}$$

Nous pouvons vérifier facilement que les équations du mouvement ne sont plus singulières, la singularité étant envoyée à l'infinie. En revanche, la régularisation est manifestement non-canonique. Toutefois, on doit noter que les orbites qui passent par $r = 0$ sont des orbites périodiques rectilignes qui peuvent être représentées par des rotations de trois systèmes à 1 degré de liberté, étudiés ci-dessus (dans ce cas le moment cinétique total est égale à 0). Dans ce cas ces orbites sont dégénérées (voir Figure 2.4). Ainsi, nous pouvons continuer notre étude en utilisant les variables non-regularisées sans perdre d'information par cette représentation.

D'autre part, il existe encore deux singularités pour $\phi = 0$ et $\phi = \pi$ qui peuvent être traitées avec une régularisation du même type. Cependant, dans ces cas, $\Theta = 0$ et, alors, ces singularités correspondent à une restriction du système tridimensionnel général (2.41) à un système à 2 dimensions dont le plan des orbites est perpendiculaire au plan (x, y) . Ces cas peuvent être représentés par des rotation des systèmes plans avec une symétrie centrale étudiés dans la section suivante.

Comme dans le cas général, l'espace des phases du système sphérique est un compact. Nous avons alors que $r \in (0, r_{max})$, où $r_{max} = x_{max}$ (équation (2.25)) et $\phi \in (0, \phi_{max})$ où $\phi_{max} = \arcsin |\Theta/L|$. La valeur maximale de la vitesse radiale R est équivalente aux valeurs maximales des vitesses X, Y et Z de l'équation (2.24) et $R \in (-R_{max}, R_{max})$. En outre, nous verrons dans les paragraphes qui suivent que la valeur maximale des composantes du moment cinétique correspondent à des membres d'une famille d'orbites périodiques.

En remplaçant la quantité qui est égale au moment cinétique total dans le hamiltonien (2.41), nous avons :

$$H_L(r, R) = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{|\mathbf{L}|^2}{r^2} \right) + \ln(r^2 + R_c^2) \quad .\tag{2.45}$$

En considérant le moment cinétique total comme un paramètre, nous voyons clairement que le système représenté par le hamiltonien (2.45) est un système à 1 degré de liberté. On peut représenter l'espace des phases du système sur le plan (r, R) , pour une variété d'énergie choisi ($h = -0.40589$). Il est rempli par des orbites périodiques dans les variables (r, R) , qui sont paramétrées par la valeur du moment cinétique (Figure 2.5b)

Sur la Figure 2.5b nous apercevons l'existence d'un point fixe dans le plan (r, R) . En posant $\dot{r} = \dot{R} = 0$ dans les équations du mouvement du système (2.45), nous trouvons que le point fixe $r = r_0$ est :

$$r_0 = \frac{|\mathbf{L}_0|}{2} \left(1 + \left(1 + 8 \frac{R_c^2}{|\mathbf{L}_0|^2} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \quad ,\tag{2.46}$$

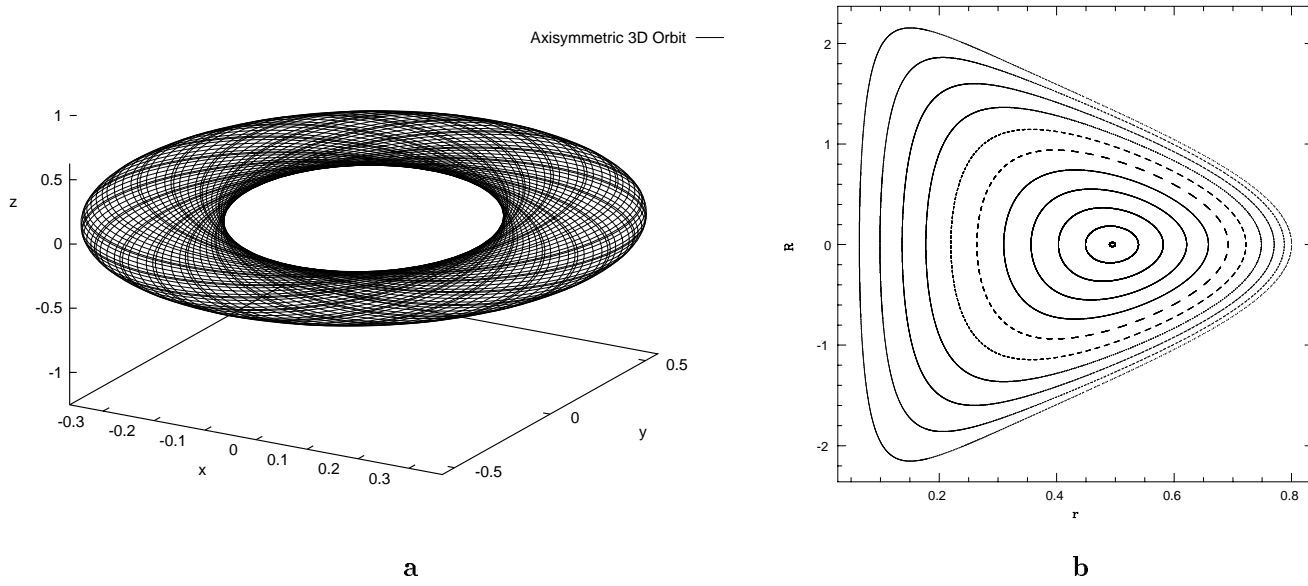


Figure 2.5 : Représentation des orbites du système sphérique **(a)** dans l'espace de configuration (x, y, z) et **(b)** pour une valeur d'énergie constante sur le plan (r, R)

où $|\mathbf{L}_0|$ est un maximum du moment cinétique pour la valeur d'énergie considérée. En effet, pour chaque niveau d'énergie, il existe une valeur de l'amplitude du moment cinétique total correspondant au point fixe, dont la forme est celle donnée par l'équation (2.46). Alors, le moment cinétique vérifie l'équation :

$$h_0 = \frac{2}{1 + \left(1 + 8 \frac{R_c^2}{L_0^2}\right)^{1/2}} + \ln \left(R_c^2 + \frac{L_0^2}{4} \left(1 + \left(1 + 8 \frac{R_c^2}{L_0^2}\right)^{1/2}\right) \right) . \quad (2.47)$$

Pour le niveau d'énergie en considération ($h_0 = -0.40589$), l'orbite périodique est définie par $r_0 = 0.49493$ et correspond à la valeur $L_0 = 0.68607$ du moment cinétique total. Les valeurs propres du système linéarisé à son voisinage étant imaginaires pures :

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i \frac{\sqrt{r_0^2 + 2R_c^2}}{r_0^2 + R_c^2} . \quad (2.48)$$

ce point fixe est linéairement elliptique. Retournons maintenant au système complet. En remplaçant Φ par $\dot{\phi} r_0^2$ dans l'équation de $|\mathbf{L}|$, séparant les variables t et ϕ et intégrant, nous avons :

$$t = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{A}{B} \frac{\sin \phi' d\phi'}{\sqrt{1 - A^2 \cos^2 \phi'}} , \quad (2.49)$$

où les constantes sont

$$A = \sqrt{\frac{|\mathbf{L}_0|^2}{|\mathbf{L}_0|^2 - \Theta_0^2}} ,$$

$$B = \frac{|\mathbf{L}_0|}{r_0^2} = \frac{4}{|\mathbf{L}_0| + \sqrt{|\mathbf{L}_0|^2 + 8R_c^2}}$$

et ϕ_0 la valeur initiale de l'angle. Les intégrales de ce type peuvent être résolues en performant la transformation $u' = A \cos \phi'$. Après quelques calculs élémentaires nous avons :

$$t = \int_{u_0}^u \frac{1}{B} d(\arcsin u') \quad , \quad (2.50)$$

et finalement :

$$\phi = \arccos \left(A^{-1} \cos (Bt - C) \right) \quad , \quad (2.51)$$

avec $C = \arccos(A \cos \phi_0)$. La dernière équation montre que ϕ est une fonction périodique, la période étant $2\pi/B$. Nous pouvons maintenant substituer la solution de ϕ dans l'équation différentielle associée à $\dot{\theta}$ et intégrer en utilisant la transformation $w = Bt - C$:

$$\theta - \theta_0 = \frac{A\Theta}{Br_0^2} \int_{w_0}^w \frac{Adw'}{A^2 - \cos^2 w'} \quad , \quad (2.52)$$

où $w_0 = -C$ et θ_0 sont les valeurs de θ et w pour $t = 0$. La primitive de l'intégrale précédente est :

$$\theta - \theta_0 = \frac{A\Theta}{Br_0^2 \sqrt{A^2 - 1}} \int_{w_0}^w d(\arctan(D \tan w')) \quad , \quad (2.53)$$

où la constante D est

$$D = \frac{A}{\sqrt{A^2 - 1}} = \left| \frac{L}{\Theta} \right| \quad .$$

Alors, en tenant compte du fait que la constante à l'extérieure de l'intégrale est égale à 1, l'équation représentant l'angle θ est :

$$\theta = \arctan \left(\left| \frac{L}{\Theta} \right| (\tan(Bt - C) + \tan C) \right) + \theta_0 \quad . \quad (2.54)$$

Les équations (2.51) et (2.54) des solutions des deux angles ϕ et θ montrent que le point fixe $r = r_0$ sur le plan (r, R) représente dans le système général (2.41) une famille d'orbites périodiques paramétrées par les valeurs de θ_0 et ϕ_0 , dont la période est :

$$T_{r_0} = 2\pi/\omega_{r_0} = \frac{\pi}{2} \left(|\mathbf{L}_0| + \sqrt{|\mathbf{L}_0|^2 + 8R_c^2} \right) \quad . \quad (2.55)$$

Il suffit de choisir une condition initiale sur cette sphère avec une valeur du moment cinétique appropriée $\mathbf{L} = |\mathbf{L}_0|$ pour construire une orbite périodique circulaire. Ces orbites périodiques sont linéairement elliptiques. Le destin de cette famille d'orbites périodiques quand le système est perturbé est prédit par le théorème des points fixes de Poincaré-Birkhoff [156], [23]. En effet, seulement un nombre fini des orbites périodiques survivra : dans notre cas, ce sont les orbites périodiques restreintes sur les plans principaux de l'espace de configuration, qui sont liés aux systèmes centraux à 2 degrés de liberté étudiés dans la section suivante.

2.3.3 Cas plans avec des symétries centrales

Comme nous avons noté dans la Section 2.3.1, les plans (x, X) , (y, Y) et (z, Z) sont invariants par le flot hamiltonien. Si, maintenant, nous posons dans le système général un couple des variables conjuguées égale à 0, nous restreignons le système sur une hypersurface de dimension 4 générée par le produit des deux plans invariants. Ces hypersurfaces sont aussi invariantes par le flot hamiltonien. Les systèmes restreints ont 2 degrés de liberté et leurs hamiltoniens sont :

$$\begin{aligned} H_{q_1} &= \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \ln \left(x^2 + \frac{y}{q_1^2} + R_c^2 \right) \\ H_{q_2} &= \frac{1}{2}(X^2 + Z^2) + \ln \left(x^2 + \frac{z}{q_2^2} + R_c^2 \right) \quad . \\ H_{q_1, q_2} &= \frac{1}{2}(Y^2 + Z^2) + \ln \left(\frac{y}{q_1^2} + \frac{z}{q_2^2} + R_c^2 \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

Posons, maintenant, $q = q_1$ et $q = q_2$ pour les hamiltoniens H_{q_1} et H_{q_2} , respectivement, et $\tilde{q} = q_1/q_2$, $\tilde{H}_{q_1, q_2} = H_{q_1, q_2} + \ln(q_2)$, $\tilde{R}_c = R_c/q_2$ (où $q = q_2/q_1$, $\tilde{H}_{q_1, q_2} = H_{q_1, q_2} + \log(q_1)$, $\tilde{R}_c = R_c/q_1$) pour le troisième hamiltonien. Ces derniers systèmes peuvent être représentés par le même hamiltonien et pour $q = 1$, ils deviennent intégrables. Cela peut être vérifié par une transformation canonique en coordonnées polaires : dans ce cas, la composante du moment cinétique correspondante est une deuxième intégrale du mouvement, à part l'énergie.

En effet, les systèmes centraux à 2 dimensions peuvent être considérés comme des restrictions sur les surfaces invariantes $(\phi, \Phi) = (\pi/2, 0)$, où $(\theta, \Theta) = (0, 0)$, où finalement, $(\theta, \Theta) = (\pi/2, 0)$, du système sphérique général. Ces systèmes préservent les caractéristiques du système général et leurs espaces des phases sont remplis par le même type d'orbites. En ce qui concerne l'orbite périodique circulaire, autour de laquelle les orbites tournent sur le plan (r, R) , elle respecte les mêmes équations du mouvement (2.51) et (2.54), modifiées en tenant compte des restrictions mentionnées ci-dessus. Ces orbites sont les représentantes de la famille des orbites circulaires du système intégrable qui persistent quand les paramètres de perturbation sont différents de 1.

Chapitre 3

Le Système Logarithmique Plan

Comme nous avons remarqué dans la Section 2.3.3, en éliminant deux variables conjuguées du hamiltonien général, le système se restreint sur une hypersurface de dimension 4, qui est invariante par le flot. Le nouveau hamiltonien s'écrit :

$$H_q(x, y, X, Y) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \ln \left(x^2 + \frac{y}{q^2} + R_c^2 \right) . \quad (3.1)$$

Le hamiltonien du système dévient maintenant une fonction à un paramètre définie dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Il faut souligner que ce système peut être considéré comme un cas spécial du système logarithmique axisymétrique. En effet, le hamiltonien généré par le potentiel axisymétrique (2.5) s'écrit :

$$H_q(r, \theta, z, R, \Theta, Z) = \frac{1}{2}(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} + Z^2) + \ln \left(r^2 + \frac{z}{q^2} + R_c^2 \right) . \quad (3.2)$$

Dans ce cas nous utilisons les coordonnées cylindriques $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$. Le moment cinétique $\Theta = xY - yX$ est une intégrale du mouvement et peut être considéré comme un paramètre du système (3.2). Alors, si on pose $\Theta = 0$ pour $y = Y = 0$ ou pour $x = X = 0$, on tombe sur un hamiltonien équivalent à celui de l'équation (3.1). L'étude du système logarithmique plan nous aidera à clarifier quelques aspects dynamiques intéressants du système triaxial.

Les équipotentiels du potentiel logarithmique plan sont des ellipses et q représente leur rapport axial. Les valeurs de q pour lesquelles la densité est partout positive sont (voir équation (2.21)) :

$$q \in \left(\sqrt{\frac{\exp(h) - 2R_c^2}{2\exp(h)}}, \sqrt{\frac{\exp(h)}{2R_c^2}} \right) . \quad (3.3)$$

Notons que l'espace des phases du système bidimensionnel préserve toutes les caractéristiques du système triaxial. Toutes les variables respectent des symétries par réflexion et l'espace des phases reste compact, les relations (2.24), (2.25) étant vraies pour les valeurs maximales des variables du système (3.1). Pour $h > \exp(R_c^2)$, la région de Hill est l'intérieur d'une ellipse (voir équation (2.26), pour $z = 0$ et $q_1 = q$) qui dégénère à un point fixe elliptique, pour $h = \exp(R_c^2)$. Lorsque $h < \exp(R_c^2)$, le mouvement ne peut plus avoir lieu.

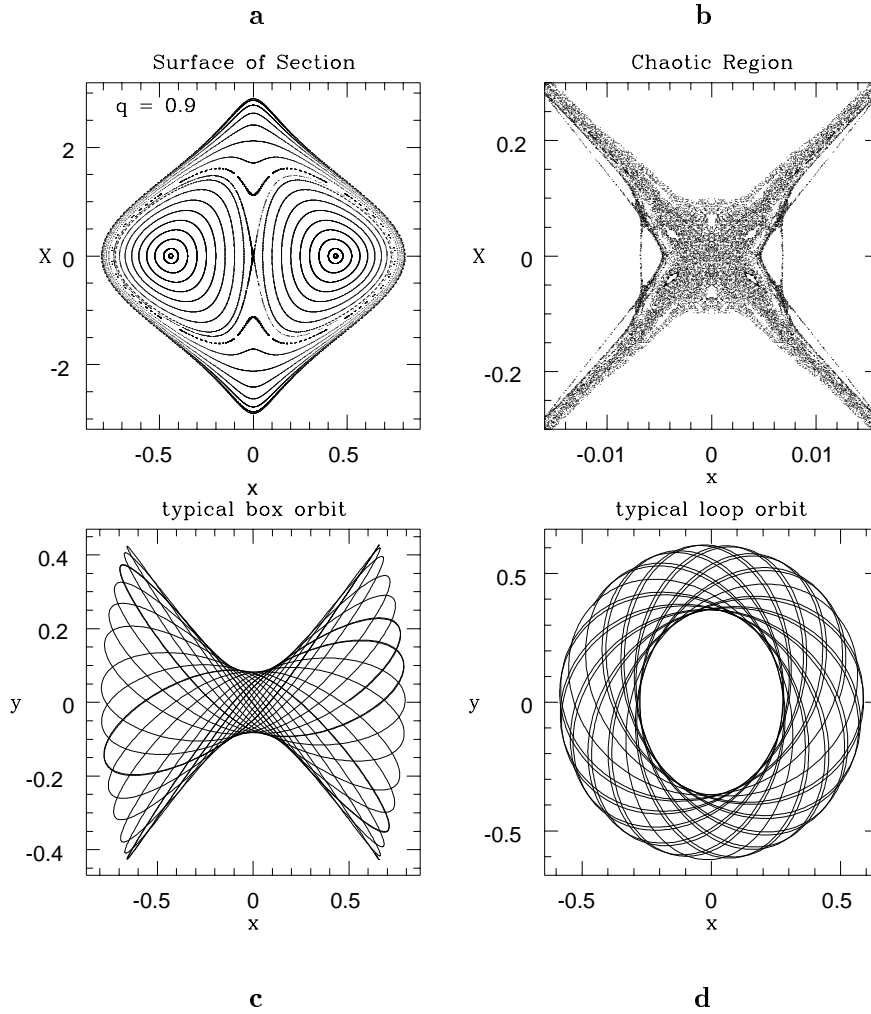


Figure 3.1 : (a) Surface de section $y = 0$ du système logarithmique pour $q = 0.9$ (b) Un agrandissement au voisinage de l'intersection de l'orbite périodique $x = X = 0$ (c) Orbite "boîte" typique (d) Orbite "boucle" typique

Le hamiltonien (3.1) correspond à un système à 2 degrés de liberté. Ce système est non-intégrable, l'énergie étant la seule intégrale du mouvement. Toutefois, les modèles à 1 degré de liberté associés aux mouvements rectilignes et le modèle central, pour $q = 1$, sont deux cas spéciaux pour lesquels le problème plan devient intégrable.

3.1 Structure orbitale du système plan - Application de premier retour

Pour faciliter l'étude d'un système à 2 degrés de liberté, nous pouvons suivre une approche classique en étudiant les retours successifs des orbites sur une surface donnée. En effet, dans un système à n degrés de liberté le mouvement se déroule dans un espace des phases de dimension $2n$. Si le système est conservatif, on peut choisir nos conditions initiales sur une variété

d'énergie constante, de dimension $2n - 1$. Alors, l'intersection entre cette variété avec une autre de la même dimension est une hypersurface de dimension $2n - 2$. Par conséquent, dans le cas d'un système à 2 degrés de liberté cette intersection produit un plan. Le concept de **surface de section de Poincaré** [156] (ou application de premier retour) est très utile dans ce cas, permettant de visualiser la structure dynamique du système sur des plans. En revanche, l'application de premier retour étant de dimension supérieure à 4, elle est inexploitable pour des systèmes à 3 degrés de liberté et plus.

Afin de construire une application de premier retour représentant toute la dynamique du problème, on doit choisir une surface qui est transverse à la majorité des trajectoires du système en question. Dans le cas du système logarithmique plan, il est facile de trouver une telle surface, à cause des symétries par réflexion. Nous avons choisi, donc, le plan $y = 0$, pour $Y > 0$. L'énergie est fixée à $h = -0.40589$, et $R_c = 0.1$ comme auparavant (pour ces valeurs de l'énergie et du paramètre R_c , nous avons par l'équation (3.3) que q doit être supérieur à 0.6964). En outre, le rapport axial est fixé à une valeur proche du cas central ($q = 0.9$). Afin d'obtenir les itérations de premier retour, nous utilisons une méthode numérique simple de Hénon [86] (la même que nous avons utilisé pour préciser la période exacte des orbites périodiques dans la Section 2.3.1) et la surface obtenue est représentée sur la Figure 3.1. Nous reconnaissons les deux types d'orbites classiques générées par le système logarithmique plan :

a) les orbites **“boîte”** (“boxes”) (Figure 3.1c) qui passent toujours par le point $x = y = 0$ de l'espace de configuration et ressemblent aux images des Lissajous générées par deux oscillateurs harmoniques indépendantes.

b) les orbites **“boucle”** (“loops”) (Figure 3.1d) qui ne passent jamais par le point $x = y = 0$ et ressemblent aux rosettes générées par un système avec une symétrie sphérique (ou centrale).

Sur la surface de section, nous apercevons aussi quelques orbites périodiques qui sont liées aux systèmes intégrables dont nous avons parlé plus haut. Les deux points fixes autour desquels tournent les orbites “boucle” sur la surface de section représentent l'intersection des deux orbites périodiques qui proviennent de la perturbation de la famille d'orbite périodique du système axisymétrique pour $q = 1$ (voir Section 2.3.3). Le point fixe $x = X = 0$ représente l'intersection de l'orbite périodique rectiligne provenant du système à 1 degré de liberté sur le plan invariant (y, Y) (Section 2.3.1). En fin de compte, la courbe extrême extérieure qui borne les orbites de la surface représente l'orbite périodique générée par le système à 1 degré de liberté sur le plan invariant (x, X) .¹

La surface de section donne l'impression que la majorité d'orbites sont régulières (quasi-périodiques) [163]. Des études similaires ont conduit un grand nombre de chercheurs, dans les années '80 [162], [163], [164], [20], [21], [22], de considérer que le système logarithmique est très proche d'un système intégrable. Toutefois, si nous agrandissons la région $x = X = 0$ autour du point d'intersection de l'orbite y -axiale nous pouvons remarquer qu'il existe une petite zone chaotique témoignant la non-intégrabilité du système et l'existence des orbites irrégulières. En effet, nous allons voir dans la section suivante que, pour le rapport axial choisi ($q = 0.9$), l'orbite y -axiale est hyperbolique. Le théorème de la variété stable énonce, qu'au voisinage d'un tel orbite hyperbolique il existe une variété stable et une variété instable de dimension 2. Les intersection homoclines entre la variété stable et la variété instable de cette orbite produisent cette petite zone chaotique (pour des définitions et une preuve du théorème voir [134], p. 136).

¹On doit préciser que l'orbite périodique ne fait pas partie des orbites calculées par l'application de premier retour parce qu'elle s'étend entièrement sur le plan $y = 0$.

3.2 Traitement Perturbatif

Nous avons observé dans la section précédente qu'un grand nombre d'orbites du système doivent être très proche des orbites quasi-périodiques qui évoluent sur des tores, suivant la théorie KAM. Malheureusement, la séparation de l'espace des phases par deux types d'orbites qui présentent des caractéristiques différentes ne nous permet pas d'avoir une représentation perturbative globale. Néanmoins, nous avons aussi noté l'existence des deux systèmes intégrables qui sont en relation avec les deux familles d'orbites. Alors, nous effectuerons deux représentations locales pour chaque type d'orbites séparément, en utilisant la proximité des deux cas intégrables.

3.2.1 Modèle Rectiligne

Comme dans le cas du système triaxial, les plans (x, X) et (y, Y) sont invariants par le flot hamiltonien et ils sont associés à des systèmes à 1 degré de liberté (équation (2.28)). Comme nous avons mentionné dans la Section 2.3.1, l'espace des phases du système contient des orbites périodiques paramétrées par la valeur de l'énergie h_0 (Figure 2.3). Pour $R_c = 0.1$ et $h_0 = -0.40598$, nous obtenons les orbites périodiques "boîte" que nous avons aperçu sur la surface de section de la Figure 3.1.

L'analyse de stabilité qu'on a effectué dans la Section 2.3.1 est valable pour les orbites rectilignes du problème plan. Il faut juste noter que, dans un système à 2 degrés de liberté, le polynôme caractéristique réduit s'écrit : $(\lambda^2 + b\lambda + 1)$, où b est la trace de la matrice de monodromie Ω (en éliminant les lignes et les colonnes correspondant aux valeurs propres $+1$). Le paramètre b qui caractérise la nature des solutions du système est appelé l'indice de stabilité, et il fut introduit par Hénon pour l'étude du problème restreint de 3 corps [85] (en effet, l'indice de stabilité de Hénon est $a = -b/2$). Si $|b| > 2$, les valeurs propres sont réelles et l'orbite en question est hyperbolique. Par contre, si $|b| < 2$ les valeurs propres sont des imaginaires pures et l'orbite étudiée est linéairement elliptique.

Suivant l'étude que nous avons effectué dans la Section 2.3.1, nous traçons l'évolution des indices de stabilité b_x correspondant à l'orbite périodique (x, X) et b_y correspondant à l'orbite périodique (y, Y) en fonction du paramètre q (Figure 3.2).

L'orbite périodique sur le plan invariant (y, Y) est linéairement elliptique pour des petites valeurs de q , son indice de stabilité oscillant entre les bords de la région stable, définis par les lignes $b = \pm 2$. Nous trouvons, cependant, des valeurs de q pour lesquelles l'orbite dépasse le seuil de stabilité $|b_x| = 2$ ($q = 0.3035 \rightarrow 0.3047$, $q = 0.3752 \rightarrow 0.3796$, $q = 0.4852 \rightarrow 0.5049$, $q = 0.6628 \rightarrow 0.7698$). La valeur maximum de l'indice de stabilité ($b_x = 3.484$) est atteinte quand $q = 0.7133$. Par contre, l'autre orbite rectiligne est hyperbolique pour toute la région de q qui correspond à un modèle physique et l'indice de stabilité devient maximum ($b_y = 24.77$) quand $q = 0.6825$. Pour $q < 0.3659$, l'orbite est linéairement elliptique. Quand $q = 1$, les deux orbites sont dégénérées, c.-à-d., leurs valeurs propres sont égales à $+1$. Ces résultats sont en accord avec l'étude perturbative de Scufflaire [167].

L'addition de la deuxième dimension, qui n'est pas symétrique par rotation, dans l'argument du logarithme du hamiltonien à 1 degré de liberté, détériore l'intégrabilité du système. Cependant, l'analyse de stabilité montre que, l'orbite périodique du grand axe est elliptique pour la plupart de valeurs de q inférieure à 1. Alors, pour des petites valeurs de y, Y , notamment pour des conditions initiales générant des orbites qui restent au voisinage de l'orbite périodique oscillant le long du grand axe, le système sera proche d'un système intégrable et la plupart de ces orbites doivent être quasi-périodiques, suivant les conclusions de la théorie KAM. En effet,

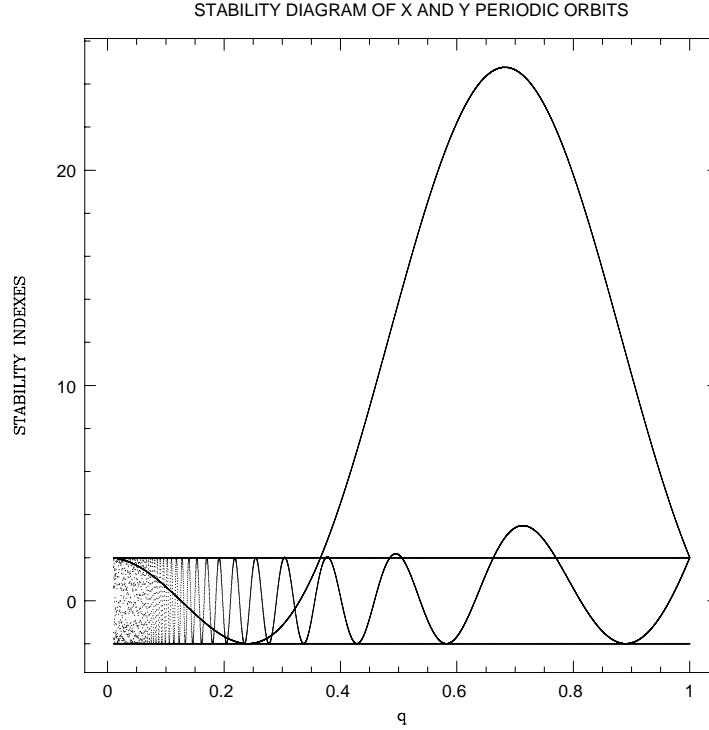


Figure 3.2 : Indices de stabilité b_x et b_y pour les deux orbites périodiques rectilignes oscillant le long des axes de x et de y , en fonction du rapport axial q

nous pouvons écrire le hamiltonien du système général comme une perturbation du système rectiligne :

$$\begin{aligned}
 H_q &= H_0 + H' \quad \text{avec} \\
 H_0 &= \frac{1}{2}X^2 + \ln(x^2 + R_c^2) \\
 H' &= \frac{1}{2}Y^2 + \ln\left(1 + \frac{y^2/q^2}{x^2 + R_c^2}\right)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nous pouvons considérer H' comme une perturbation du système à 1 degré de liberté, si $y^2/[q^2(x^2 + R_c^2)]$ et Y sont suffisamment petits, c.-à-d. pour des petites valeurs de y/q .

3.2.2 Modèle central

Pour $q = 1$, le système dévient intégrable, le moment cinétique $\Theta = xY - yX$ étant une deuxième intégrale du mouvement. Le hamiltonien du système est :

$$H_1(r, \theta, R, \Theta) = \frac{1}{2}\left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}\right) + \ln\left(r^2 + R_c^2\right), \tag{3.5}$$

Il peut être considéré comme le hamiltonien d'un système à 1 degré de liberté avec Θ comme paramètre. Ce système est équivalent aux cas particuliers étudiés dans la Section 2.3.3, correspondant à des restrictions du problème général, avec une symétrie sphérique.

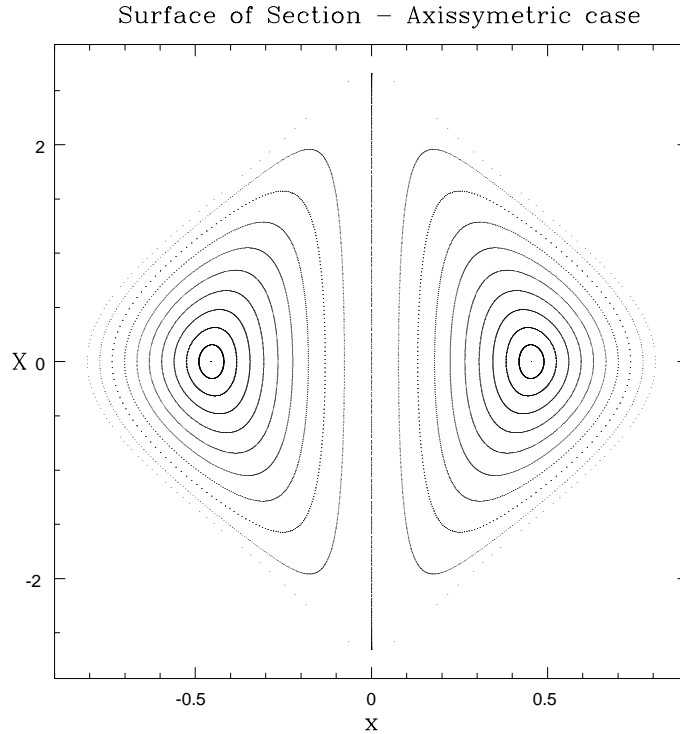


Figure 3.3 : Surface de section $y = 0$ du système central, écrit en coordonnées cartésiennes. On voit clairement la ligne de points fixes correspondant à la famille d'orbites rectilignes dégénérées.

Comme nous avons déjà mentionné dans la Section 2.3.3, toutes les caractéristiques du système général sont préservées dans ce cas. Les orbites rectilignes sont exclues par cette représentation, correspondant à la singularité du système central à $r = 0$. En effet, dans le cas central (comme dans le cas sphérique), il existe une famille d'orbites périodiques rectilignes ($\Theta = 0, \theta = \theta_0$), qui forment sur la surface de section $y = 0$ du système central écrit en coordonnées cartésiennes, une ligne de points fixes suivant l'axe des X (voir Figure 3.3). Les deux orbites qui survivent après la perturbation, suivant le théorème de Poincaré-Birkhoff, sont l'orbite périodique x -axiale et y -axiale.

Nous trouvons aussi un représentant de la famille d'orbites périodiques circulaires étudiées dans le cas sphérique (Section 2.3.2) :

$$r_0 = \frac{|\Theta_0|}{2} \left(1 + \left(1 + 8 \frac{R_c^2}{|\Theta_0|^2} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{|\Theta_0|}{r_0^2} = \frac{4}{|\Theta_0| + \sqrt{|\Theta_0|^2 + 8R_c^2}} t$$

Dans la Section 2.3.2, nous nous posons la question en ce qui concerne l'avenir de la famille d'orbites périodiques, quand le système intégrable (2.41) est perturbé. Comme nous avons déjà signalé, seulement les orbites restreintes sur les plans principaux de l'espace de configuration survivent. En effet, nous pouvons déterminer numériquement la position des orbites

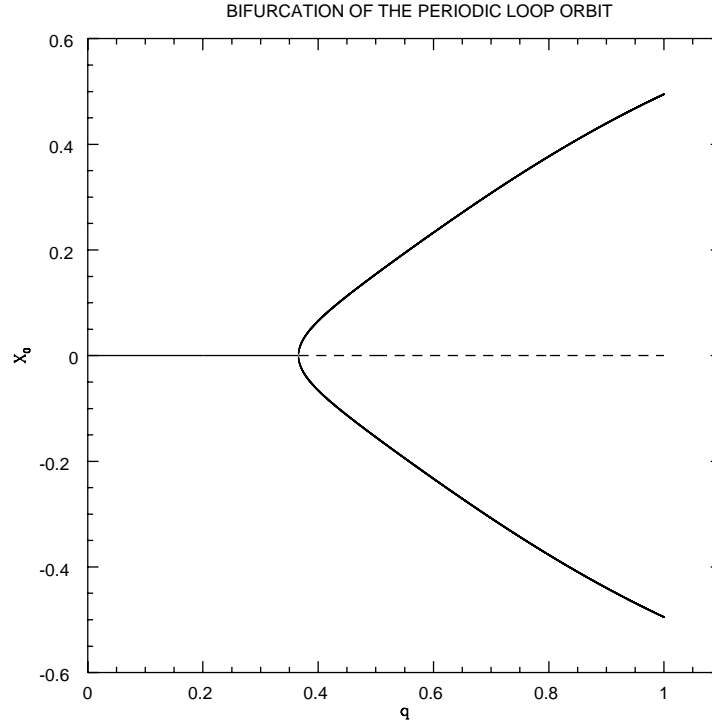


Figure 3.4 : Diagramme de bifurcation des orbites périodiques “boucle”

périodiques du système plan en utilisant une méthode de Newton-Raphson (l’algorithme peut être trouvé dans le livre classique de Press *et al.* [158]). Donc, nous pouvons tracer la position de l’intersection des orbites périodiques avec le plan $y = 0$, en fonction du paramètre de perturbation q (voir Figure 3.4). On peut observer que les orbites périodiques dégénèrent sur l’orbite périodique rectiligne (y, Y) , quand $q = 0.3658$, une valeur pour laquelle l’orbite rectiligne devient elliptique. Alors, pour $q \leq 0.3658$, les orbites “boucle” disparaissent.

Suivant l’idée dont nous avons parlé plus haut dans le texte, nous essaierons d’écrire le système général comme une perturbation du système axisymétrique. C’est pour cette raison que nous utilisons la même transformation pour exprimer le hamiltonien $H_q(x, y, X, Y)$ dans les variables (r, θ, R, Θ) :

$$H_q(r, \theta, R, \Theta) = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) + \ln \left(r^2 \cos^2 \theta + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{q^2} + R_c^2 \right) . \quad (3.7)$$

Cette représentation excluant les régions de l’espace des phases qui passent par le point singulier $r = 0$, seulement les régions occupées par les orbites “boucle” peuvent être considérées qu’elles proviennent d’une perturbation du problème axisymétrique. Alors, le hamiltonien (3.7) peut

être modifié de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 H_q &= H_1 + H' \quad \text{avec} \\
 H_1 &= \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) + \ln \left(r^2 + R_c^2 \right) \\
 H' &= \ln \left(1 + \frac{r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{q^2} - 1 \right)}{r^2 + R_c^2} \right) .
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dans ce cas, pour que H' soit une perturbation, il faut que l'argument dans le logarithme soit proche de 1, ce qui correspond à des systèmes avec des valeurs de q proche de 1.

Il ressort clairement de l'analyse effectuée ci-dessus que les orbites “boîte” et les orbites “boucle” générées par le système logarithmique, peuvent être considérées comme des perturbations qui ont comme origine le système à 1 degré de liberté et le système axisymétrique, respectivement. Comme nous avons observé sur la surface des section (Figure 3.1), pour des petites valeurs de ces perturbations la plupart des orbites doivent être très proches d'orbites quasi-périodiques. Pour étudier le comportement quasi-périodique de ces orbites, nous bénéficierons de l'aspect fondamental de l'analyse en fréquence, notamment la représentation d'une fonction définie numériquement sous la forme d'une série quasi-périodique.

3.3 La méthode d'analyse en fréquence

L'analyse en fréquence de Laskar est une méthode nouvelle pour l'étude de la dynamique globale des systèmes conservatifs. Elle est issue des recherches de Laskar sur la stabilité du système solaire [106], [107]. Dans les lignes qui suivent nous résumons les aspects fondamentaux de la méthode, suivant la rédaction d'un article de revue de Laskar [110].

3.3.1 Mouvements quasi-périodiques

Dans le cas d'un système intégrable à n degrés de liberté, après une transformation en variables action-angle $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\varphi})$, le hamiltonien s'écrit :

$$H(\mathbf{J}, \boldsymbol{\varphi}) = H_0(\mathbf{J}) , \tag{3.9}$$

où $(\mathbf{J}) = (J_1, J_2, \dots, J_n)$ et $(\boldsymbol{\varphi}) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. Alors, le hamiltonien dépend des variables d'actions seules, étant les n intégrales du système. Les équations du mouvement peuvent alors s'exprimer sous la forme suivante :

$$\dot{J}_j = 0, \quad \dot{\varphi}_j = \frac{\partial H_0(\mathbf{J})}{\partial J_j} = \nu_j(\mathbf{J}) , \tag{3.10}$$

ou dans des variables complexes $z_j = J_j \exp(i \varphi_j)$:

$$z_j(t) = z_{j0} \exp(i \nu_j t) , \tag{3.11}$$

avec $z_{j0} = z_j(0)$, pour $j = 1, \dots, n$. Les trajectoires du système évoluent sur des tores, c.-à-d. des produits des cercles de rayon $J_j = |z_j(0)|$, avec une fréquence constante $\nu_j(\mathbf{J})$. Maintenant, supposons que le système considéré est toujours intégrable, mais il n'est pas exprimé dans des variables action-angle. A titre d'exemple, on peut faire la transformation $(\mathbf{z}) \mapsto (\boldsymbol{\zeta})$:

$$\zeta_j = I_j \exp(i \vartheta_j) = z_j + \varepsilon G_j(\mathbf{z}) , \quad (3.12)$$

où G_j est une fonction analytique sur un domaine qui exclu $\mathbf{0}$. Les mouvements représentés dans ces variables seront toujours quasi-périodiques mais dans ce cas, les trajectoires décrivent des tores tordus, à cause de la transformation (3.12). La fonction \mathbf{G} peut être exprimée sous la forme d'une série de Laurent :

$$G_j = \sum_{\mathbf{m}} c_{\mathbf{m}} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_n^{m_n} , \quad (3.13)$$

où $(\mathbf{m}) = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Alors, en utilisant les équations (3.11), (3.12) et (3.13), les variables $\boldsymbol{\zeta}$ sont écrites :

$$\zeta_j(t) = z_{j0} e^{i \nu_j t} + \sum_{\mathbf{m}} a_{\mathbf{m}} e^{i (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu}) t} , \quad (3.14)$$

où $a_{\mathbf{m}} = \varepsilon c_{\mathbf{m}} z_{10}^{m_1} z_{20}^{m_2} \dots z_{n0}^{m_n}$ et $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu} = m_1 \nu_1 + m_2 \nu_2 + \dots + m_n \nu_n$ le produit scalaire ordinaire. Même si le système hamiltonien considéré est intégrable, il n'est pas écrit, en général, dans des variables action-angle. De plus, un système à plusieurs degrés de liberté est en général non-intégrable. Néanmoins, comme nous avons montré par exemple dans la section précédente, le hamiltonien peut souvent être exprimé comme une perturbation d'un système intégrable sous la forme :

$$H(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H'(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) , \quad (3.15)$$

où le hamiltonien H est réel et analytique pour $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) \in B^n \times \mathbb{T}^n$, $B^n \subset \mathbb{R}^n$ et \mathbb{T}^n un tore de dimension n . Poincaré a démontré qu'une transformation comme celle représentée par l'équation (3.12) pourrait être formellement définie, mais les séries en jeu ne convergent pas uniformément [156]. Par conséquent, il est impossible en pratique de construire une transformation analytique qui transforme les variables $\boldsymbol{\zeta}$ aux variables \mathbf{z} et les mouvements aux produits des rotations sur les tores. Cependant, le théorème KAM énonce que dans le cas où le système est non - dégénéré

dans le domaine d'intérêt (avec une torsion non-nulle $\left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^2} \right| \neq 0$, voir équation (1.10)) et sous l'hypothèse que la perturbation est suffisamment petite, il existe encore des conditions initiales définies sur un ensemble de Cantor pour lesquelles les séries (3.14) correspondantes sont convergentes, si le vecteur fréquence associé est suffisamment loin des résonances [3]. Dans ce cas aussi, comme pour un système intégrable, les mouvements sont quasi-périodiques et les orbites évoluent sur des tores déformés, les tores KAM. De plus, quand l'amplitude de la perturbation décroît, la mesure de l'ensemble des tores devient large.

Toutefois, ces tores ne sont pas définis dans un ensemble ouvert des conditions initiales, mais dans un ensemble discontinu. En dépit de ce fait, suivant des résultats de la théorie de Nekhorochev [141], les solutions qui commencent proches des tores KAM auront un comportement très similaire aux solutions KAM, pour un intervalle de temps fini, et, en pratique, il sera impossible de les distinguer des vraies solutions quasi-périodiques. Cette caractéristique du système nous permet de représenter les mouvements entre les tores KAM, en interpolant avec des solutions quasi-périodiques de la forme (3.14), quand la densité des tores est grande.

L'aspect fondamental de l'analyse en fréquence consiste à obtenir directement, avec une manière numérique, la forme quasi-périodique (3.14) des solutions du système, sans rechercher une transformation explicite en variables action-angle données par l'équation (3.12). Plus précisément, il est possible de définir sur un temps fini une approximation quasi-périodique d'une solution numérique d'un système hamiltonien, sous la forme d'une somme finie :

$$\zeta_j(t) = z_{j0} e^{i\nu_j t} + \sum_k^N a_{(\mathbf{m})_k} e^{i((\mathbf{m})_k \cdot \boldsymbol{\nu}) t} , \quad (3.16)$$

où les $a_{(\mathbf{m})_k}$ ont une amplitude décroissante. En effet, l'approximation quasi-périodique déterminée de façon numérique, coïncide avec la troncature de l'expansion actuelle (3.14), dans les bords d'une précision numérique élevée [110].

3.3.2 Analyse numérique des fréquences fondamentales (NAFF)

L'analyse en fréquence de Laskar s'appuie sur le fait qu'il est possible de déterminer une approximation quasi-périodique pour une fonction $f(t) \in \mathbb{C}$ définie numériquement, dans une période temporelle finie $[-T, T]$, avec une précision élevée, plusieurs ordres de grandeur qu'une transformation de Fourier rapide (FFT) [158]. En effet, quand on calcule des séries de Fourier pour approximer $f(t)$ sur un intervalle de temps fini $[-T, T]$, on suppose inévitablement que $f(t)$ est une fonction périodique de période $2T$, ceci étant manifestement faux. Dans l'algorithme construit par Laskar [111], [108], nous faisons une hypothèse différente, qui est dictée par le comportement dynamique du système, en cherchant des approximations quasi-périodiques. Dans ce section, nous décrivons l'algorithme numérique NAFF, qui est utilisé pour la détermination des approximations quasi-périodiques. Ici, nous donnerons un résumé de l'algorithme, qui est détaillé par Laskar [106], [107], [111]. Considérons une fonction quasi-périodique du temps t :

$$f(t) = e^{i\nu_1 t} + \sum_{k \in (\mathbb{Z}^n - (1, 0, \dots, 0))} a_k e^{i\langle k, \nu \rangle t} , \quad (3.17)$$

qui est définie dans le domaine complexe, où les a_k sont d'une amplitude décroissante par rapport à k . L'algorithme NAFF est une méthode numérique désignée à obtenir une approximation :

$$f'(t) = \sum_{k=1}^N a'_k e^{i\omega'_k t} , \quad (3.18)$$

avec un nombre fini de termes N , à partir d'une évaluation numérique de $f(t)$ sur un intervalle de temps fini $[-T, T]$. La précision de cette procédure est très élevée en tenant en compte que la méthode était initialement développée pour découvrir d'une façon numérique une solution analytique pour une approche perturbative dans la dynamique planétaire [106].

Les fréquences ω'_k et les amplitudes complexes a'_k sont définies à travers un schéma itératif, que nous esquisserons par la suite. Pour déterminer la première fréquence ω'_1 , nous cherchons le maximum de la quantité suivante :

$$\phi(\sigma) = \langle f(t), e^{i\sigma t} \rangle , \quad (3.19)$$

où le produit scalaire $\langle f(t), g(t) \rangle$ est défini comme :

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \bar{g}(t) dt , \quad (3.20)$$

et $\chi(t)$ est une fonction de poids, c.-à-d. une fonction positive et paire qui respecte la relation suivante :

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \chi(t) dt = 1 \quad . \quad (3.21)$$

Dans tous nos calculs nous utilisons la fenêtre de filtrage de Hanning [158] :

$$\chi(t) = \chi_1(t) = 1 + \cos(\pi t/T) \quad , \quad (3.22)$$

quoi qu'une autre fonction de poids sous la forme :

$$\chi_p(t) = \frac{2^p (p!)^2}{(2p)!} (1 + \cos(\pi t/T))^p \quad , \quad (3.23)$$

pourrait être utilisée [158]. Lorsque le premier harmonique $e^{i\omega'_1 t}$ est déterminé, nous obtenons l'amplitude complexe correspondante a'_1 par une projection orthogonale et le processus est recommencé pour la fonction qui reste $f_1(t) = f(t) - a'_1 e^{i\omega'_1 t}$. Il faut juste noter que les harmoniques $e^{i\omega'_k t}$ ne sont pas orthogonaux par rapport au produit scalaire (3.20). Alors, il est nécessaire d'orthogonaliser itérativement l'ensemble des fonctions $(e^{i\omega'_k t})_k$, quand nous effectuons la projection de f sur $e^{i\omega'_k t}$. Pour une solution KAM, la précision de l'algorithme d'analyse en fréquence est plusieurs ordres de grandeur plus élevée qu'une simple FFT. Ce résultat est rigoureusement prouvé par Laskar [110] et peut être énoncé de la façon suivante : *Pour une solution quasi-périodique sous la forme (3.17), et en utilisant une fonction de poids $\chi(t) = \chi_p(t)$, l'application de l'algorithme NAFF décrit ci-dessus, sur un intervalle de temps fini $[-T, T]$, fournit une approximation ν_1^T de la vraie fréquence ν_1 , dont la précision $\nu_1 - \nu_1^T$ a l'expression asymptotique suivante, pour $T \rightarrow \infty$:*

$$\nu_1 - \nu_1^T = \frac{(-1)^{p+1} \pi^{2p} (p!)^2}{A_p T^{2p+2}} \sum_k \frac{\Re(a_k)}{\Omega_k^{2p+1}} \cos(\Omega_k T) + O\left(\frac{1}{T^{2p+2}}\right) \quad , \quad (3.24)$$

$$\text{avec} \quad \Omega_k = \langle k, \nu \rangle - \nu_1 \quad \text{et} \quad A_p = -\frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} \right) \quad . \quad (3.25)$$

En particulier, alors qu'avec une FFT ordinaire, la précision pour la détermination des fréquences de plus grande amplitude est de l'ordre de $1/T$, l'utilisation de la fenêtre de filtrage de Hanning ($p = 1$) donne une précision de l'ordre de $1/T^4$ pour des fonctions quasi-périodiques. Sans la fenêtre ($p = 0$), l'algorithme NAFF permet une précision de l'ordre de $1/T^2$. Alors, à travers la méthode on pourra déterminer facilement et avec une grande précision le vecteur de fréquence $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$. Il faut aussi noter que l'équation (3.24) montre que l'approximation quasi-périodique d'une orbite régulière converge asymptotiquement vers la vraie solution KAM. Alors, ces approximations peuvent apporter des éléments importantes en ce qui concerne la dynamique du système.

3.3.3 Application fréquence (“frequency map”)

Lorsque l'approximation quasi-périodique (3.16) est obtenue à la manière décrite dans la section précédente, nous pouvons construire des applications fréquence qui représentent l'aspect le plus spectaculaire de l'analyse en fréquence. L'interprétation de la dynamique globale du système

est faite en étudiant la régularité de cette application [107], [111], [108], [109], [113], [112], [62], [145], [146].

Considérons un système hamiltonien non-dégénéré, qui peut être écrit sous la forme (3.15). Le mouvement est confiné sur une variété d'énergie de dimension $2n-1$, définie par $H(I, \theta) = h$. D'habitude, on construit une surface de section de Poincaré, pour $\theta_1 = 0$ par exemple, qui restreint l'étude sur un espace de dimension $(2n-2)$. Bien que la construction de l'application de Poincaré est très utile pour un système à 2 degrés de liberté (voir Section (3.1)), elle devient plus difficile à exploiter dans des systèmes de dimension supérieure. Pour la construction de l'application fréquence, on adopte une réduction beaucoup plus drastique du problème, en fixant toutes les variables du type angles dans des valeurs arbitraires $\theta_j(0) = \theta_{j0}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Toutes les angles étant fixés et les systèmes étant non-dégénérés², pour toutes les conditions initiales des variables du type actions $(I)_{n-1} = (I_1, I_2, \dots, I_{n-1})$ dans B^{n-1} , et pour des valeurs de ε suffisamment petites la dernière variable d'action I_n^* est déterminée par la condition de la restriction du système sur la surface d'énergie $H((I)_{n-1}, I_n^*, \theta_0) = h$. Nous pouvons effectuer une intégration numérique des équations du mouvement du système, pour un temps fini $[0, \tau + T]$, où T est fixé, et τ est arbitraire. Ensuite, l'algorithme NAFF fournit une approximation quasi-périodique de la solution numérique pour un intervalle de temps de longueur T , $[\tau, \tau + T]$ (voir Section 3.3.2). Alors, nous obtenons l'approximation quasi-périodique sous la forme (3.18). A partir de ces approximations nous retenons seulement le vecteur fréquence $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ et nous construisons l'application fréquence :

$$F_T : B^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \quad (3.26)$$

$$((I)_{n-1}, \tau) \longrightarrow \left(\frac{\nu_1}{\nu_n}, \frac{\nu_2}{\nu_n}, \dots, \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n} \right) ,$$

des variables du type actions au vecteur des nombres de rotation. Admettons que \mathcal{A} est la sous-variété de B^{n-1} des valeurs des actions $(I)_{n-1}$ pour lesquelles les conditions initiales $((I)_{n-1}, I_n^*, \theta_0)$ appartiennent à des tores KAM de dimension n . Dans ce cas, nous pouvons affirmer que, dans les marges de la précision numérique de notre algorithme, le vecteur de rotation $(\nu_r) = \left(\frac{\nu_1}{\nu_n}, \frac{\nu_2}{\nu_n}, \dots, \frac{\nu_{n-1}}{\nu_n} \right)$ est le vrai vecteur qui paramétrise les tores KAM considérés.

Alors, l'application fréquence a les propriétés suivantes :

- a) Si $(I)_{n-1} \in \mathcal{A}$, alors $F_T((I)_{n-1}, \cdot)$ est constante dans \mathbb{R} , c.-à-d. l'application est invariante par rapport au temps.
- b) Pour chaque τ , l'application

$$F_T^\tau : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \quad (3.27)$$

$$(I)_{n-1} \longrightarrow F_T((I)_{n-1}, \tau) ,$$

est régulière dans un certain sens et elle est un difféomorphisme dans le cas d'un système non-dégénéré [157].

Ces deux dernières propriétés sont significatives pour l'étude de la dynamique du système hamiltonien en question. Le critère (b) nous assure que quand l'application fréquence n'est pas

²La plupart de fois il nous intéresse la non-dégénérescence isoénergetique du système, c.-à-d., si une fréquence ne s'annule pas et les rapports entre cette fréquence avec toutes les autres (les nombres de rotation ν_i/ν_n) sont indépendants par rapport au niveau de l'énergie choisi $H = h$ (voir [8], p. 183).

régulière, les tores KAM correspondants sont détruits. Dans le cas d'un système à 2 degrés de liberté, nous pouvons avoir un critère, encore plus marquant. En effet, dans ce cas, l'application fréquence $F_T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ doit être localement monotone. Dès que cette condition n'est pas vérifiée pour deux valeurs des variables du type actions consécutives I_{10} and I'_{10} , nous pouvons conclure que il n'existe pas de tores invariants dans tout l'intervalle de fréquences (ou de nombres de rotation) correspondant $[F_T(I_{10}), F_T(I'_{10})]$ [111], [108], [145].

3.4 Analyse en fréquence du potentiel logarithmique plan : Approximations quasi-périodiques

Cette section est consacrée à la détermination des approximations quasi-périodiques des solutions du potentiel logarithmique plan, suivant les lignes développées dans la Section 3.3. Nous appliquons l'algorithme NAFF sur des membres représentatifs des deux types d'orbites. A travers les expansions en séries quasi-périodiques définies par l'analyse en fréquence nous espérons déduire des informations utiles sur la nature des deux familles d'orbites.

3.4.1 Orbites “boîte”

Nous choisissons parmi les différentes orbites “boîte” du système logarithmique plan un candidat typique \mathcal{B}_1 , pour $q = 0.9$ et $R_c = 0.1$, générée par les conditions initiales $(x_0, X_0, y_0, Y_0) = (0.49, 1.3156, 0, 0.4788)$. Nous intégrons les équations du mouvement du système et nous obtenons les solutions numériques $(x(t), y(t), X(t), Y(t))$. Nous appliquons alors l'algorithme NAFF sur la fonction numérique complexe $f_x(t) = x(t) + iX(t)$ qui est similaire à la fonction ζ de l'équation (3.14). L'approximation quasi-périodique $\tilde{f}_x(t)$ de $f_x(t)$ est obtenue sous la forme :

$$\tilde{f}_x(t) = \sum_{k=1}^{40} a_k e^{i\omega_k t} , \quad (3.28)$$

où $a_k = A_k e^{i\phi_k}$ avec $A_k \geq 0$ une amplitude réelle, et ϕ_k est la phase.

Une analyse similaire est appliquée sur la fonction $f_y(t) = y(t) + iY(t)$ de la même orbite “boîte” \mathcal{B}_1 . Nous pouvons remarquer par l'équation (3.28) que nous demandons typiquement 40 termes pour chaque approximation quasi-périodique. Ici pour des raisons d'économie d'espace nous représentons le 20 premiers termes sur le Tableau 3.1, pour \tilde{f}_x et \tilde{f}_y , respectivement. Suivant la procédure décrite dans la section précédente nous considérons les deux fréquences de plus grande amplitude des approximations \tilde{f}_x et \tilde{f}_y , comme les fréquences fondamentales du mouvement $\nu_{\mathcal{B}_1}$ et $\nu'_{\mathcal{B}_1}$, dont les valeurs sont :

$$\nu_{\mathcal{B}_1} = -2.1632613 , \quad \nu'_{\mathcal{B}_1} = -3.0140526 . \quad (3.29)$$

Alors, nous pouvons vérifier que les fréquences ω_k sont des combinaisons linéaires entières de $\nu_{\mathcal{B}_1}$ et $\nu'_{\mathcal{B}_1}$:

$$\omega_k = m_k \nu_{\mathcal{B}_1} + m'_k \nu'_{\mathcal{B}_1} . \quad (3.30)$$

Les valeurs identifiées des multiplicateurs m_k et m'_k peuvent se lire verticalement dans le colonnes du Tableau 3.1, ainsi que la différence $\delta\omega_k = \left| \omega_k - (m_k \nu_{\mathcal{B}_1} + m'_k \nu'_{\mathcal{B}_1}) \right|$, qui peut être considérée comme un test pour vérifier la forme quasi-périodique de la série. Notons que nous arrivons à déterminer avec une très bonne précision tous les harmoniques. Il faut aussi tenir

Tableau 3.1 : Analyse en fréquence de l'orbite "boîte" \mathcal{B}_1

k	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	$\delta\omega_k$	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	$\delta\omega_k$
Solution pour les variables (x, X)							Solution pour les variables (y, Y)					
1	-2.1632613	1.219875	58.05	1	0	.0000000	-3.0140526	.484639	145.87	0	1	.0000000
2	2.1632669	.448598	121.95	-1	0	.0000056	3.0140257	.243166	34.16	0	-1	.0000269
3	-6.4897833	.218101	354.13	3	0	.0000006	-1.3125024	.247096	330.26	2	-1	.0000323
4	6.4897837	.159862	185.87	-3	0	.0000002	-7.3405258	.134417	81.90	2	1	.0000495
5	-10.8163021	.097035	290.22	5	0	.0000045	7.3405259	.102185	98.10	-2	-1	.0000493
6	10.8163021	.080611	249.78	-5	0	.0000045	-11.6670372	.065594	17.98	4	1	.0000606
7	-3.8647527	.061526	53.59	-1	2	.0000911	11.6670373	.055238	162.02	-4	-1	.0000605
8	-15.1428193	.054603	226.30	7	0	.0000010	-15.9935497	.038197	314.06	6	1	.0000708
9	15.1428193	.047838	313.70	-7	0	.0000010	15.9935496	.033702	225.94	-6	-1	.0000709
10	3.8647576	.036232	126.41	1	-2	.0000862	1.3125175	.033392	209.72	-2	1	.0000474
11	-19.4693357	.034193	162.39	9	0	.0000161	-20.3200617	.024248	250.13	8	1	.0000815
12	-.4618507	.032923	62.60	3	-2	.0001719	20.3200616	.021973	289.86	-8	-1	.0000815
13	19.4693357	.030852	17.61	-9	0	.0000162	-24.6465725	.016193	186.21	10	1	.0000932
14	-23.7958515	.022747	98.47	11	0	.0000230	24.6465725	.014930	353.79	-10	-1	.0000933
15	23.7958515	.020912	81.53	-11	0	.0000230	-28.9730820	.011176	122.28	12	1	.0001065
16	-28.1223665	.015727	34.55	13	0	.0000307	28.9730819	.010430	57.72	-12	-1	.0001065
17	-8.1912922	.015760	349.70	1	2	.0000743	-5.6389317	.009325	86.24	4	-1	.0000601
18	28.1223665	.014647	145.45	-13	0	.0000307	-9.9656397	.008934	22.55	6	-1	.0001243
19	.4617524	.012123	297.52	-3	2	.0000736	-33.2995896	.007892	58.36	14	1	.0001214
20	8.1912921	.012330	190.30	-1	-2	.0000744	33.2995896	.007432	121.64	-14	-1	.0001215

en compte que nous ne faisons pas un ajustement supplémentaire avec une méthode de moindres carrés, par exemple. Les phases de tous les termes sont aussi déterminées comme des combinaisons entières des deux phases correspondant aux termes d'amplitude maximale :

$$\phi_{\mathcal{B}_1} = 58.05^\circ, \quad \phi'_{\mathcal{B}_1} = 145.87^\circ, \quad (3.31)$$

bien que l'accord ne pas si bon, comme pour les fréquences. Alors, l'argument de l'exponentiel des approximations s'écrit sous la forme :

$$\omega_k t + \phi_k = m_k(\nu_{\mathcal{B}_1} t + \phi_{\mathcal{B}_1}) + m'_k(\nu'_{\mathcal{B}_1} t + \phi'_{\mathcal{B}_1}), \quad (3.32)$$

et donc, les approximations quasi-périodiques $\tilde{f}_x(t)$ et $\tilde{f}_y(t)$ peuvent être exprimées suivant l'équation (3.14), avec les coefficients réels $\alpha_{\mathbf{m}}$.

La facilité avec laquelle nous arrivons à reconnaître la forme quasi-périodique standard des séries montre que cette solution particulière est régulière. Néanmoins, l'amplitude des coefficients A_k ne décroît pas vite, ce qui indique que les variables utilisées sont loin des variables action-angle. En effet, pour les vraies variables action-angle nous attendons d'obtenir seulement un terme ! Dans le Tableau 3.1 nous pouvons distinguer des termes non-couplés, dont la forme est $m\nu_{\mathcal{B}_1}$ et d'autres termes couplés $m\nu_{\mathcal{B}_1} + m'\nu'_{\mathcal{B}_1}$, avec $m' \neq 0$, qui sont associées avec des amplitudes plus petites.

Tableau 3.2 : Analyse en fréquence de l'orbite “boîte” périodique \mathcal{B}_2 , variables x, X ($(y = Y = 0)$)

k	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	$\delta\omega_k$
1	-2.1390513	1.353230	59.51	1	0	.0000000
2	2.1390533	.491040	120.49	-1	0	.0000021
3	-6.4171576	.243037	358.53	3	0	.0000038
4	6.4171577	.177503	181.47	-3	0	.0000040
5	-10.6952616	.110476	297.54	5	0	.0000053
6	10.6952616	.091583	242.46	-5	0	.0000054
7	-14.9733651	.063950	234.56	7	0	.0000064
8	14.9733650	.055943	303.44	-7	0	.0000063
9	-19.2514681	.041373	175.57	9	0	.0000069
10	19.2514679	.037287	4.43	-9	0	.0000067
11	-23.5295704	.028529	114.58	11	0	.0000066
12	23.5295700	.026203	65.42	-11	0	.0000063
13	-27.8076715	.020502	53.60	13	0	.0000053
14	27.8076709	.019079	124.40	-13	0	.0000047
15	-32.0857710	.015166	352.61	15	0	.0000023
16	32.0857702	.014250	187.39	-15	0	.0000015
17	-34.3638683	.011461	291.61	17	0	.0000030
18	34.3638670	.010848	248.39	-17	0	.0000042
19	-40.6419620	.008805	230.62	19	0	.0000117
20	40.6419603	.008382	309.39	-19	0	.0000134

Pour établir la relation entre les orbites “boîte” et le modèle à 1 degré de liberté associé aux mouvements rectilignes, nous appliquons la méthode d’analyse en fréquence à l’orbite périodique rectiligne \mathcal{B}_2 oscillant le long de l’axe des x (Section 3.2.1), générée par les conditions initiales $(x, X, y, Y) = (0.49, 1.4, 0, 0)$. Dans ce cas, comme $y = Y = 0$, nous analysons seulement $f_x(t)$. Les résultats sont présentées sur le Tableaux 3.2. Les harmoniques étant des multiples entiers de $\nu_{\mathcal{B}_2}$, la série représente une fonction périodique. Toutefois les amplitudes des termes décroissent très lentement. Si les variables analysées étaient proche des variables action-angle, nous obtiendrions seulement quelques termes qui décroîtraient très vite par rapport à k . Nous pouvons alors conclure que les variables utilisées sont assez loin des variables action-angle. Autrement dit, la complexité de la solution quasi-périodique des orbites “boîte” (voir Tableaux 3.1), ne provient pas seulement de la non-intégrabilité du système mais principalement par le mauvais paramétrage des variables employées.

La fréquence fondamentale $\nu_{\mathcal{B}_2} = -2.1390513$ de l’orbite périodique \mathcal{B}_2 a une valeur assez proche de la fréquence $\nu_{\mathcal{B}_1}$ de l’orbite “boîte” \mathcal{B}_1 , ce qui montre que l’orbite périodique rectiligne est très proche de l’orbite “boîte” \mathcal{B}_1 . Nous pouvons vérifier que les deux approximations quasi-périodiques diffèrent des quelques termes couplés de petite amplitude et la taille des termes non-couplés est comparable. Cet accord n’apparaît pas pour des conditions initiales générant des orbites “boîte” qui sont loin du problème intégrable à 1 degré de liberté. La perturbation étant augmentée dans ce cas, nous attendons (et nous avons aussi observé) que le couplage entre les fréquences fondamentales sera beaucoup plus fort.

3.4.2 Orbites “boucle”

Nous sélectionnons une orbite “boucle” typique \mathcal{L}_1 , générées par les conditions initiales suivantes $(x_0, X_0, y_0, Y_0) = (0.49, 0.4788, 0, 1.3156)$, pour $q = 0.9$ et $R_c = 0.1$. Les solutions de l’analyse en fréquence pour $f_x(t) = x(t) + iX(t)$ et $f_y(t) = y(t) + iY(t)$ sont présentées sur le Tableau 3.3. Nous pouvons d’abord remarquer qu’une résonance 1:1 apparaît entre les fréquences d’amplitudes maximales des approximations quasi-périodiques. Alors, toutes les deux fréquences fondamentales peuvent être obtenues par la solution correspondant à l’approximation quasi-périodique \tilde{f}_x :

$$\nu_{\mathcal{L}_1} = -2.9486477 \quad , \quad \nu'_{\mathcal{L}_1} = -1.3575268 \quad , \quad (3.33)$$

et les phases associées :

$$\phi_{\mathcal{L}_1} = 17.73^\circ \quad , \quad \phi'_{\mathcal{L}_1} = 61.46^\circ \quad . \quad (3.34)$$

Dans ce cas aussi, les amplitudes des deux solutions $\tilde{f}_x(t)$ et $\tilde{f}_y(t)$ ne décroissent pas vite. Néanmoins, nous pouvons déterminer tous les harmoniques avec une bonne précision et nous pouvons conclure que cette orbite particulière doit être quasi-périodique. En outre, les séries présentées sur le Tableau 3.3 sont assez similaires, ce qui montre que le système est très proche du cas central (voir Section 3.2.2).

Tableau 3.3 : Analyse en fréquence de l’orbite “boucle” \mathcal{L}_1

k	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	$\delta\omega_k$	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	$\delta\omega_k$
Solution pour les variables (x, X)							Solution pour les variables (y, Y)					
1	-2.9486477	.832887	17.73	1	0	.0000000	-2.9486423	.968905	107.73	1	0	.0000054
2	2.9486465	.411027	162.27	-1	0	.0000011	2.9486444	.478152	72.27	-1	0	.0000033
3	-1.3575268	.213103	61.46	0	1	.0000000	-1.3575292	.182493	331.46	0	1	.0000024
4	-7.2548206	.098186	276.92	2	1	.0000015	-7.2548196	.114114	6.92	2	1	.0000026
5	7.2548207	.074397	263.08	-2	-1	.0000014	7.2548197	.086466	173.08	-2	-1	.0000025
6	1.3575271	.032318	118.55	0	-1	.0000003	-8.8459256	.030843	143.18	3	0	.0000173
7	-8.8459249	.026970	53.18	3	0	.0000180	1.3575261	.027676	208.55	0	-1	.0000007
8	8.8459239	.021491	126.82	-3	0	.0000190	8.8459250	.024578	36.82	-3	0	.0000180
9	-11.5610026	.020119	176.12	3	2	.0000060	-11.5610012	.023518	266.12	3	2	.0000046
10	11.5610027	.016915	3.88	-3	-2	.0000061	11.5610013	.019774	273.88	-3	-2	.0000048
11	-13.1521048	.013188	312.37	4	1	.0000127	-13.1521050	.015079	42.37	4	1	.0000124
12	13.1521047	.011324	227.63	-4	-1	.0000127	13.1521049	.012948	137.63	-4	-1	.0000125
13	-5.6636127	.008182	320.54	1	2	.0000886	-17.4582782	.006058	301.56	5	2	.0000137
14	5.6636129	.005727	219.46	-1	-2	.0000884	17.4582781	.005402	238.44	-5	-2	.0000138
15	-17.4582793	.005283	211.56	5	2	.0000126	-15.8671750	.005699	165.30	4	3	.0000040
16	17.4582793	.004711	328.44	-5	-2	.0000126	15.8671751	.005023	14.70	-4	-3	.0000040
17	-4.5397922	.004946	334.04	2	-1	.0000238	-4.5396332	.004577	63.85	2	-1	.0001353
18	-15.8671787	.004832	75.31	4	3	.0000077	4.5396443	.002925	116.13	-2	1	.0001241
19	15.8671791	.004259	104.69	-4	-3	.0000081	-21.7644684	.002273	200.76	6	3	.0000021
20	4.5397897	.003161	205.96	-2	1	.0000213	-14.7426617	.002230	177.99	5	0	.0005766

Pour examiner la connexion entre l’orbite “boucle” et les orbites du système central (voir équation (3.5)), nous appliquons la méthode d’analyse en fréquence à l’orbite “boucle” \mathcal{L}_2 ,

Tableau 3.4 : Analyse en fréquence de l'orbite “boucle” \mathcal{L}_2 du modèle central ($q = 1$)

k	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	$\delta\omega_k$	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	$\delta\omega_k$
Solution pour les variables (x, X)							Solution pour les variables (y, Y)					
1	-2.7940218	.926343	17.55	1	0	.0000000	-2.7940415	.926343	107.57	1	0	.0000197
2	2.7940295	.438027	162.44	-1	0	.0000076	2.7940342	.438027	72.44	-1	0	.0000124
3	-1.2631535	.159477	81.67	0	1	.0000000	-1.2631539	.159477	351.67	0	1	.0000003
4	-6.8512153	.087563	296.78	2	1	.0000181	-6.8512186	.087563	26.79	2	1	.0000214
5	6.8512154	.065258	243.22	-2	-1	.0000182	6.8512182	.065258	153.21	-2	-1	.0000210
6	1.2631530	.018544	98.33	0	-1	.0000006	1.2631537	.018544	188.33	0	-1	.0000001
7	-10.9084010	.014696	216.01	3	2	.0000285	-10.9084028	.014696	306.01	3	2	.0000303
8	10.9084010	.012228	323.99	-3	-2	.0000285	10.9084028	.012228	233.99	-3	-2	.0000302
9	-14.9655868	.002950	135.23	4	3	.0000388	-14.9655876	.002950	225.23	4	3	.0000397
10	14.9655868	.002580	44.77	-4	-3	.0000389	14.9655876	.002580	314.77	-4	-3	.0000397
11	-5.3203388	.002400	.89	1	2	.0000099	-5.3203375	.002400	270.89	1	2	.0000099
12	5.3203382	.001640	179.11	-1	-2	.0000093	5.3203384	.001640	269.11	-1	-2	.0000095
13	-19.0227729	.000646	54.46	5	4	.0000496	-19.0227728	.000646	144.46	5	4	.0000495
14	19.0227728	.000582	125.54	-5	-4	.0000495	19.0227728	.000582	35.54	-5	-4	.0000495
15	-9.3775236	.000241	280.12	2	3	.0000194	-9.3775256	.000241	190.12	2	3	.0000213
16	9.3775240	.000194	259.88	-2	-3	.0000198	9.3775255	.000194	349.88	-2	-3	.0000212
17	-23.0799557	.000149	333.69	6	5	.0000570	-23.0799565	.000149	63.68	6	5	.0000578
18	23.0799560	.000137	206.31	-6	-5	.0000573	23.0799570	.000137	116.32	-6	-5	.0000584

générée par les mêmes conditions initiales, pour $q = 1$. Les solutions de l'analyse en fréquence de $f_x(t)$ et de $f_y(t)$, limitées à 18 termes sont exposées sur le Tableau 3.4. Les fréquences fondamentales adoptées sont :

$$\nu_{\mathcal{L}_2} = -2.7940218 \ , \quad \nu'_{\mathcal{L}_2} = -1.2631539 \ . \quad (3.35)$$

Les fréquence ω_k sont presque les mêmes et les phases des harmoniques correspondants sont en quadrature. Les solutions écrites dans ces variables ne sont pas périodiques, mais l'intégrabilité du système est évidente à travers une transformation en coordonnées polaires (équation (3.5)).

Alors, nous avons transformé l'orbite \mathcal{L}_2 dans les nouvelles variables, correspondant aux conditions initiales $(r_0, R_0, \theta_0, \Theta_0) = (0.49, 0.4788, 0, 0.6446)$. Cette fois ci, nous avons analysé les valeurs tabulées des fonctions $f_r(t) = r(t) + iR(t)$ et $f_\theta(t) = \sqrt{|2\Theta|}(\cos \theta(t) + i \sin \theta(t))$ (Tableau 3.5) où $\sqrt{|2\Theta|} \cos \theta$, $\sqrt{|2\Theta|} \sin \theta$ sont les variables polaires de Poincaré [156]. Dans ces variables, les fréquences fondamentales sont :

$$\tilde{\nu}_{\mathcal{L}_2} = -4.0571847 \ , \quad \tilde{\nu}'_{\mathcal{L}_2} = -2.7940315 \ . \quad (3.36)$$

En effet, la fréquence $\tilde{\nu}'_{\mathcal{L}_2}$ est égale à $\nu_{\mathcal{L}_2}$, tandis que $\tilde{\nu}_{\mathcal{L}_2}$ est égale à $\nu_{\mathcal{L}_2} + \nu'_{\mathcal{L}_2}$ (équation (3.34)). Ce changement des fréquences fondamentales est justement attribué à la transformation dans les variables polaires. Ces variables semblent plus adaptées pour étudier la dynamique de la partie de l'espace des phases remplie par les orbites “boucle”. En effet, avec cette transformation nous arrivons à éliminer la résonance entre les variables initiales (x, y, X, Y) .

Tableau 3.5 : Analyse en fréquence de l'orbite "boucle" \mathcal{L}_2 du cas central $q = 1$, exprimé en coordonnées polaires

k	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	$\delta\omega_k$	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	$\delta\omega_k$
Solution pour les variables (r, R)							Solution pour les variables (θ, Θ)					
1	-.0000006	.501969	.00	0	0	.0000006	-2.7940315	1.103898	107.56	0	1	.0000000
2	-4.0571847	.294418	99.22	1	0	.0000000	1.2631528	.189893	8.33	-1	1	.0000004
3	4.0571851	.177983	80.78	-1	0	.0000004	-6.8512168	.181049	26.78	1	1	.0000006
4	-8.1143703	.052560	18.45	2	0	.0000009	-10.9084019	.040083	306.01	2	1	.0000011
5	8.1143702	.041027	161.55	-2	0	.0000009	5.3203386	.010908	89.11	-2	1	.0000007
6	-12.1715554	.011756	297.68	3	0	.0000014	-14.9655871	.009760	225.23	3	1	.0000016
7	12.1715554	.009971	242.32	-3	0	.0000014	-19.0227726	.002491	144.46	4	1	.0000023
8	-16.2287406	.002864	216.90	4	0	.0000019	9.3775238	.001560	169.88	-3	1	.0000013
9	16.2287406	.002531	323.10	-4	0	.0000019	-23.0799571	.000654	63.69	5	1	.0000021
10	-20.2859258	.000730	136.13	5	0	.0000025	13.4347075	.000284	250.66	-4	1	.0000003
11	20.2859257	.000661	43.87	-5	0	.0000023	-27.1371424	.000175	342.91	6	1	.0000028
12	-24.3431112	.000191	55.35	6	0	.0000031	17.4919052	.000058	331.42	-5	1	.0000133
13	24.3431110	.000176	124.65	-6	0	.0000030	-31.1943228	.000047	262.13	7	1	.0000015
14	-28.4002959	.000051	334.58	7	0	.0000032	-35.2515642	.000013	181.42	8	1	.0000553
15	28.4002933	.000048	205.43	-7	0	.0000005	21.5490809	.000013	52.22	-6	1	.0000044
16	-32.4574765	.000014	253.80	8	0	.0000009	-39.3088659	.000004	100.86	9	1	.0001723
17	32.4574869	.000013	286.20	-8	0	.0000094	25.6062905	.000003	132.98	-7	1	.0000293
18	-36.5146743	.000004	173.04	9	0	.0000122						
19	36.5146786	.000004	6.95	-9	0	.0000165						

Dans ces nouvelles variables, $f_r(t)$ est périodique (Tableau 3.5), avec une fréquence $\tilde{\nu}_{\mathcal{L}_2}$, tandis que $f_\theta(t)$ est périodique dans un référentiel tournant avec une fréquence $\tilde{\nu}'_{\mathcal{L}_2}$ (Tableau 3.5). Les séries décroissent plus rapidement par rapport à celles correspondant aux fonctions $\tilde{f}_x(t)$ et $\tilde{f}_y(t)$. Ceci indique que le choix des variables est plus adapté, même si les variables polaires ne sont pas des variables action-angle du problème intégrable. Le premier terme de la fonction $\tilde{f}_r(t)$ est une constante (la fréquence est proche de 0) comme il représente la projection du point fixe r_0 sur le plan (r, R) (voir Section 3.2.2).

Notons finalement que la fonction \tilde{f}_θ est quasi-périodique.³ Ceci peut être vérifié facilement en examinant l'équation différentielle $\dot{\theta} = \Theta/r^2$. La variable r étant une fonction périodique du temps, $\dot{\theta}$ est aussi périodique, et il peut être exprimé en série de Fourier :

$$\dot{\theta} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{ik\nu t} . \quad (3.37)$$

³Ce fait illustre l'avantage fourni par l'extension d'Arnold [2] au théorème de Liouville. Les variables action-angle représentent un système des variables symplectiques dont les angles sont linéaires sur les tores, ce qui n'est pas vrai, en général, dans le cas des variables conjuguées aux intégrales du système qui ne sont pas des actions.

En intégrant l'équation (3.37) nous obtenons :

$$\theta = a_0 t + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a'_k e^{ik\nu t} . \quad (3.38)$$

Si $a_0 \neq 0$, l'angle polaire θ est une fonction quasi-périodique dont les fréquences sont a_0 et ν .

Dans les paragraphes précédents, nous avons montré que quand les orbites “boîte” sont exprimées dans les variables (x, X, y, Y) , la mauvaise convergence de séries ne provient pas d'une interaction compliquée entre les différents degrés de libertés, mais à cause de l'inaptitude des variables. En effet, elle est aussi présente dans la partie intégrable correspondant aux solutions de l'orbite périodique rectiligne. Pour les orbites “boucle”, une situation similaire apparaît, bien qu'une meilleure convergence peut être réussie par une transformation dans des coordonnées polaires et ces moments conjugués (r, R, θ, Θ) . Toutefois, ces variables sont encore loin des vraies variables action-angle de la partie intégrable du hamiltonien (3.5). Néanmoins, les approximations quasi-périodiques obtenues à travers la méthode d'analyse en fréquence fournissent des bonnes estimations de la paramétrisation des tores KAM. Alors, on pourrait fournir une solution alternative sur le problème d'auto-consistance en utilisant les approximations quasi-périodiques pour calculer une fonction de distribution $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ correspondant à chaque tore dans les parties de l'espace des phases où la densité des tores KAM est assez élevée.

3.5 Variables action-angle

Les vraies variables action-angle des hamiltoniens non-perturbés (associées aux mouvements rectilignes ou au modèle central) doivent être un meilleur choix que les variables utilisées dans la section précédente. Malheureusement, dans le cas du système logarithmique ces variables ne peuvent pas être obtenues explicitement. Alors, nous utilisons des méthodes numériques afin de les calculer. Ceci nous permettra d'examiner l'amélioration atteinte en utilisant ces variables optimales. En même temps, il sera une évidence numérique directe du résultat rigoureux prouvé pas Laskar [110] que les fréquences déterminées dans la section précédente en utilisant l'analyse en fréquence coïncident avec les fréquences paramétrant les mouvements quasi-périodiques sur les tores KAM, dans les limites de la précision de la méthode.

3.5.1 Modèle rectiligne

Considérons le hamiltonien à 1 degré de liberté du modèle rectiligne :

$$H_0(X, x) = \frac{1}{2} X^2 + \ln(x^2 + R_c^2) , \quad (3.39)$$

et (x_0, X_0) un point donné de l'espace des phases qui correspond à une valeur de l'énergie $h_0 = H_0(x_0, X_0)$. Une variable d'action est obtenue par l'intégrale suivante (équation (1.6)) :

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p} \, d\mathbf{q} = \frac{1}{2\pi} \oint X(x, h_0) dx . \quad (3.40)$$

L'intégrale est évaluée le long d'une courbe fermée de l'espace des phases correspondant à la valeur de l'énergie h_0 . En effet, l'intégrale (3.40) représente géométriquement l'aire de la surface

Tableau 3.6 : Détermination de la fréquence fondamentale pour plusieurs orbites périodiques du modèle rectiligne pour plusieurs niveaux d'énergie $H_0 = h_0$, en utilisant trois manières de calcul différentes a) analyse en fréquences des solutions numériques exprimées dans les variables (x, X) , (fréquence ν_x), b) analyse en fréquence des orbites exprimées en variables action-angle (ν_J), et c) calcul numérique directe en utilisant l'équation (3.42) (ν). Nous présentons aussi l'amplitude $A_J = \sqrt{2J}$ et la phase correspondante φ_J . L'orbite correspondant à une valeur d'énergie $h_0 = -0.40589$ est l'orbite "boîte" \mathcal{B}_2 (voir aussi Tableau 3.2).

h_0	A_J	φ_J	ν_J	ν_x	ν
-1.32025	1.0073371	16.13	-3.33451655	-3.33451654	-3.33451665
-1.14089	1.0616411	32.13	-3.05848788	-3.05848797	-3.05848789
-0.89589	1.1389347	44.60	-2.71637266	-2.71637281	-2.71637266
-0.65089	1.2201409	53.11	-2.41109933	-2.41109944	-2.41109933
-0.47154	1.2822727	57.95	-2.20888259	-2.20888186	-2.20888259
-0.40586	1.3056139	59.51	-2.13905196	-2.13905125	-2.13905196

à l'intérieur de cette courbe. La période T et la fréquence ν du mouvement peuvent être aussi déterminées en intégrant l'équation :

$$\dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial X} . \quad (3.41)$$

En tenant compte de la symétrie par réflexion on a :

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = \oint \frac{dx}{\frac{\partial H_0}{\partial X}} = 4 \int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{2h - 2 \ln(x^2 + R_c^2)}} . \quad (3.42)$$

En dépit du fait que les primitives des intégrales (3.40), (3.42) peuvent être calculées par des codes numériques standards (comme la méthode de Romberg [158]), nous avons observé que, dans le cas du système étudié, une très grande précision peut être obtenue en s'appuyant sur la méthode d'intégration numérique de Runge-Kutta du 7/8ème ordre, utilisée pour évaluer les trajectoires.

En effet, la période T d'une orbite périodique $(x(t), X(t))$ est calculée numériquement comme le temps de retour au point initial (x_0, X_0) dans l'espace des phases à 2 dimensions du système (en tenant compte des symétries par réflexion, on peut calculer $T/4$). L'action est déterminée numériquement en intégrant une équation différentielle supplémentaire :

$$\frac{dA(t)}{dt} = X(t) \frac{dx(t)}{dt} = X(t) \frac{\partial H_0}{\partial X} = X(t)^2 . \quad (3.43)$$

où $A(t)$ est l'intégrale indéfinie :

$$A(t) = \int X(t) dx(t) , \quad (3.44)$$

qui représente l'aire comprise à l'intérieur d'une tranche de la courbe $(x(t), X(t))$ à l'instant t (voir figure 3.5a). L'angle associé φ est calculé en utilisant le temps d'intersection t' avec l'axe des x positif et, par conséquent :

$$\varphi = \frac{2\pi(T - t')}{T} . \quad (3.45)$$

Alors, on peut définir dans tout l'espace des phases une transformation symplectique de $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ des variables (x_0, X_0) en variables action-angle (φ_0, J_0) . A travers cette procédure numérique nous pouvons vérifier que la valeur numérique de l'action reste constante le long des orbites avec une précision d'environ 10^{-14} .

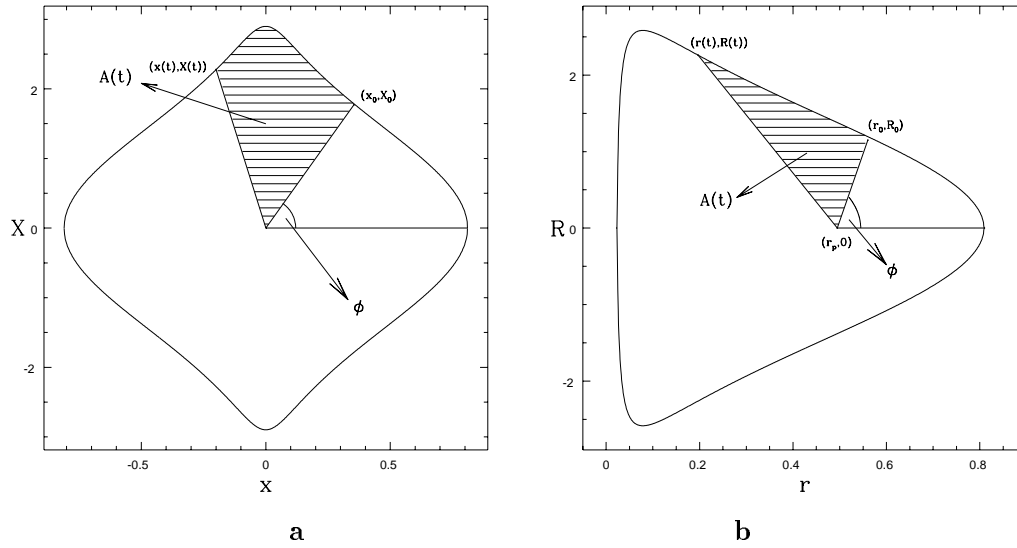


Figure 3.5 : Représentation géométrique des variables action-angle pour les deux approximations intégrables du système logarithmique

Nous avons intégré plusieurs orbites pour des conditions initiales différentes (correspondant donc à plusieurs valeurs de l'énergie) et les résultats sont réunis sur le Tableau 3.6. L'orbite correspondant à la valeur $h_0 = -0.40589$ de l'énergie est l'orbite \mathcal{B}_2 , dont l'analyse dans les variables originales était présentée dans la section précédente (Tableau 3.2). Pour chaque orbite, la fréquence fondamentale est déterminée avec trois façons différentes. Une analyse en fréquence dans les variables originales (x, X) fournit la fréquence ν_x . Ensuite nous procédons à la transformation en variables action-angle définies par les équations (3.43) et (3.45) et appliquons la méthode d'analyse en fréquence dans les variables $f_J = \sqrt{2J}(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Comme prévu, dans ces variables, nous obtenons un seul terme $\tilde{f}_J = A_J \exp i(\nu_J t + \varphi_{x0})$, où l'amplitude A_J est égale à $\sqrt{2J}$. En effet, en utilisant ces variables nous avons transformées le mouvement dans des cercles de rayon $\sqrt{2J}$ (Figures 3.6c et d). Finalement, nous avons calculé les valeurs numériques de la fréquence définie par l'équation (3.42), qui doit être traité comme la valeur exacte de la fréquence fondamentale de chaque orbite.

Pour toutes les valeurs de l'énergie, les trois fréquences ν, ν_x, ν_J coïncide, avec une précision de l'ordre de 10^{-7} . Comme prévu, après une transformation en variables action-angle, l'analyse en fréquence donne toujours des résultats plus précis par rapport aux variables originales.

3.5.2 Modèle central

Tableau 3.7 : Détermination de la fréquence fondamentale pour plusieurs orbites “boucle” du modèle central, pour le niveau d’énergie ($h_0 = -0.40589$) : a) analyse en fréquence de l’orbite exprimée en variables action-angle ($\nu_{J_r}, \nu_{J_\theta}$), b) analyse en fréquence de l’orbite exprimée dans les variables r, R et θ, Θ (ν_r, ν_θ), et c) calcul numérique directe utilisant les équation (3.48) et (3.53) (ν, ν').

A_{J_r}	φ_{r_0}	ν_{J_r}	ν_r	ν	A_{J_θ}	φ_{θ_0}	ν_{J_θ}	ν_θ	ν'
.009887	267.68	-4.0379118	-4.0379120	-4.0379118	1.171324	88.40	-2.8008021	-2.8008022	-2.8008021
.180169	187.73	-4.0487980	-4.0487975	-4.0487980	1.151195	88.40	-2.7971979	-2.7971975	-2.7971979
.355754	192.87	-4.0807327	-4.0807329	-4.0807327	1.090040	88.41	-2.7831000	-2.7830011	-2.7830100
.522946	198.57	-4.1310683	-4.1310716	-4.1310683	.984962	88.43	-2.7466060	-2.7466080	-2.7466060
.676992	203.71	-4.1932966	-4.1932946	-4.1932966	.828251	88.48	-2.6597210	-2.6597195	-2.6597210
.812373	207.53	-4.2519864	-4.2519908	-4.2519864	.595903	88.59	-2.4687254	-2.4687297	-2.4687254

Le hamiltonien du système central

$$H_C = \frac{1}{2}(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2}) + \ln(r^2 + R_c^2) , \quad (3.46)$$

représente un système à 2 degrés de liberté. Les variables action-angle $(\varphi_r, \varphi_\theta, J_r, J_\theta) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ seront l’image de $(r, \theta, R, \Theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^2$ par une transformation symplectique que nous allons déterminer.

Le hamiltonien H_C étant indépendant de θ , le moment cinétique Θ est une intégrale du mouvement et peut être considéré comme un paramètre. Alors, le mouvement sur le plan (r, R) est périodique (Tableau 3.5). Considérons un point de l’espace des phases $(r_0, \theta_0, R_0, \Theta_0)$, et $h_0 = H_C(r_0, R_0, \Theta_0)$ le niveau de l’énergie correspondant. Comme dans le cas du système à 1 degré de liberté, l’action peut être déterminée par l’équation :

$$J_r = \oint R(h_0, r, \Theta) dr , \quad (3.47)$$

et la fréquence fondamentale ν_r est donnée par :

$$T_r = \frac{2\pi}{\nu_r} = \oint \frac{dr}{\frac{\partial H_C}{\partial R}} . \quad (3.48)$$

Comme auparavant, ces quantités sont obtenues en intégrant numériquement l’équation associée (voir Section 3.5.1) :

$$\frac{dA_r(t)}{dt} = R(t) \frac{\partial H_C}{\partial R} = R(t)^2 , \quad (3.49)$$

où $A_r(t) = \int R(t) dr(t)$ représente l’aire à l’intérieur de la courbe $(r(t), R(t))$ à l’instant t (voir figure 3.5b). Comme dans le cas du système rectiligne, l’angle φ_r est déterminé (équation

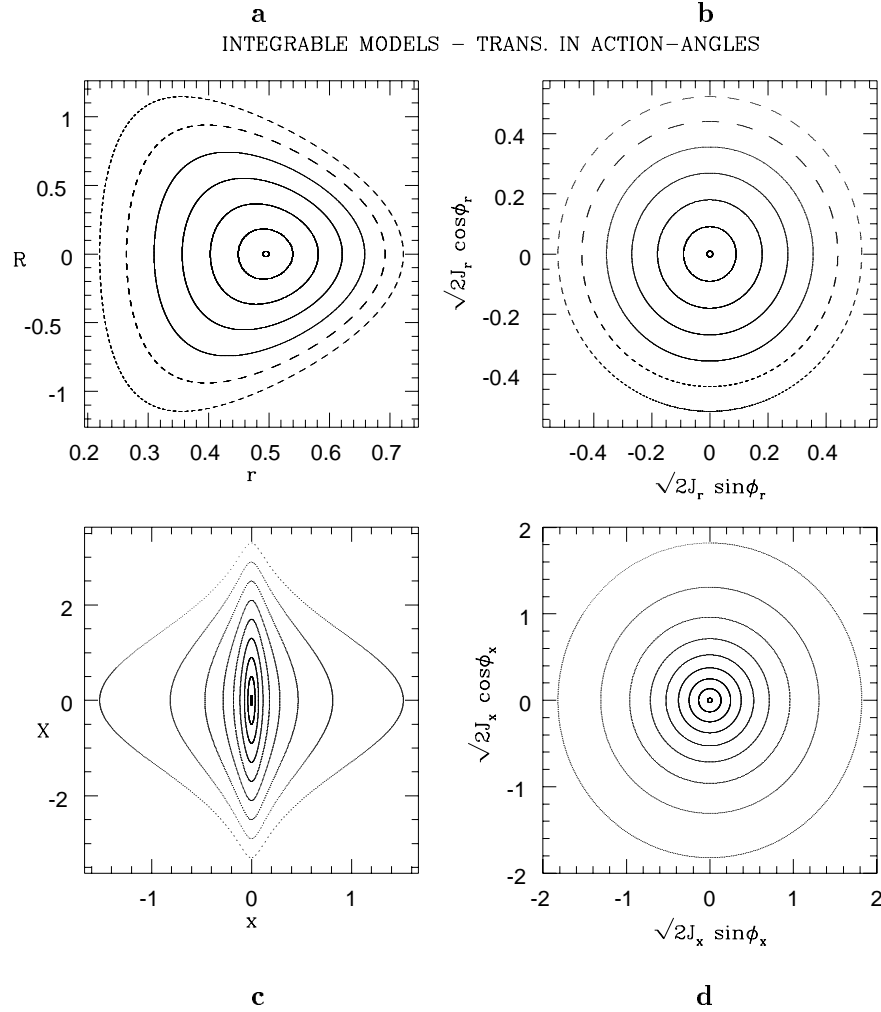


Figure 3.6 : Transformation en variables action-angle pour les orbites “boucle” évoluant sur le plan (r, R) du modèle central (**a** et **b**) et de l’espace des phases du modèle rectiligne occupé par des orbites “boîte” périodiques (**c** et **d**)

(3.45)) en calculant le temps d’intersection de chaque orbite avec l’axe des r . La variable Θ étant une intégrale du mouvement, l’action associée est simplement :

$$J_\theta = \Theta , \quad (3.50)$$

mais, l’angle des coordonnées polaires θ ne représente pas l’angle φ_θ des variables action-angle. En effet, en utilisant la conservation de la forme symplectique de la transformation ($dr \wedge dR + d\theta \wedge d\Theta = d\varphi_r \wedge dJ_r + d\varphi_\theta \wedge dJ_\theta$) (le symbole \wedge défini le produit extérieur) l’angle des variables action-angle peut être écrit (voir aussi [88]) :

$$\varphi_\theta(t) = \nu_\theta t = \theta(t) + g(r(t), R(t), \Theta) , \quad (3.51)$$

où $g(t)$ est une fonction périodique de période T_r . Alors :

$$g(r(t + T_r), R(t + T_r), \Theta) = g(r(t), R(t), \Theta) , \quad (3.52)$$

et on peut facilement déterminer ν_θ par l'équation :

$$\nu_\theta = \frac{\theta(T_r + t_0) - \theta(t_0)}{T_r} , \quad (3.53)$$

et l'angle φ_θ sera $\varphi_\theta = \nu_\theta t$. Nous calculons le temps t comme dans le cas du modèle rectiligne (équation (3.45)), en utilisant l'équation (3.49). Mais nous devons être prudents, car l'angle θ est une fonction quasi-périodique (voir équation (3.37)). Alors, nous devons faire un nouveau paramétrage temporelle $\tau = t/T_r$. Dans ce cas $\theta(\tau)$ est périodique et le calcul peut être effectué exactement comme auparavant.

Tableau 3.8 : Analyse en fréquence de l'orbite “boîte” \mathcal{B}_1 , exprimée en variables action-angle (φ_x, J_x, y, Y) (comparer au Tableau 3.2)

k	$\nu_{J_x k}$	$A_{J_x k}$	$\phi_{J_x k}$	$n_{J_x k}$	$n'_{J_x k}$	$\delta \nu_{J_x k}$
1	-2.16326194	1.1775069	58.05	1	0	.00000000
2	2.16321868	.0756208	302.01	-1	0	.00004326
3	-3.86471203	.0660365	53.54	-1	2	.00013117
4	3.86473847	.0416293	126.43	1	-2	.00010473
5	6.48971923	.0243206	5.94	-3	0	.00006659
6	-.46172951	.0224681	62.46	3	-2	.00004883
7	8.19124334	.0167195	190.36	-1	-2	.00012374
8	-4.78820080	.0132380	178.48	5	-2	.00000375
9	10.81624069	.0130056	69.85	-5	0	.00006900
10	15.14276568	.0083503	133.76	-7	0	.00006789
11	12.51774322	.0076381	254.30	-3	-2	.00014774
12	-6.48976071	.0069717	354.11	3	0	.00002511
13	19.46928782	.0058849	197.67	-9	0	.00006962
14	4.78818717	.0049442	1.53	-5	2	.00001738
15	23.79581069	.0043829	261.58	-11	0	.00007063
16	-15.14277920	.0045644	46.26	7	0	.00005437
17	-10.81620711	.0045165	110.11	5	0	.00010258
18	-19.46931295	.0037671	342.36	9	0	.00004449
19	16.84422328	.0034815	318.26	-5	-2	.00019156
20	28.12233533	.0033823	325.49	-13	0	.00006987

Comme dans le cas du modèle associé aux mouvements rectilignes, nous avons intégré plusieurs orbites générées par des conditions initiales différentes, pour la même valeur de l'énergie $h_0 = -0.40589$. Toutes ces orbites sont transformées en variables action-angle, en utilisant la transformation numérique décrite dans les paragraphes précédents et les deux fréquences fondamentales ν et ν' du système ont été déterminées avec trois manières différentes (Tableau 3.7) : Une analyse en fréquence dans les variables (r, R) et (θ, Θ) donne les valeurs ν_r and ν_θ , une analyse en fréquence dans les variables action-angle fournit ν_{J_r} et ν_{J_θ} , alors que le calcul numérique directe en utilisant les équations (3.48) et (3.53) fournit les valeurs “exactes” ν et ν' . Pour chaque orbite, l'analyse en fréquence appliquée dans les solutions du système exprimées en variables action-angle donne un seul terme dont l'amplitude et la phase sont aussi présentées dans le Tableau 3.7.

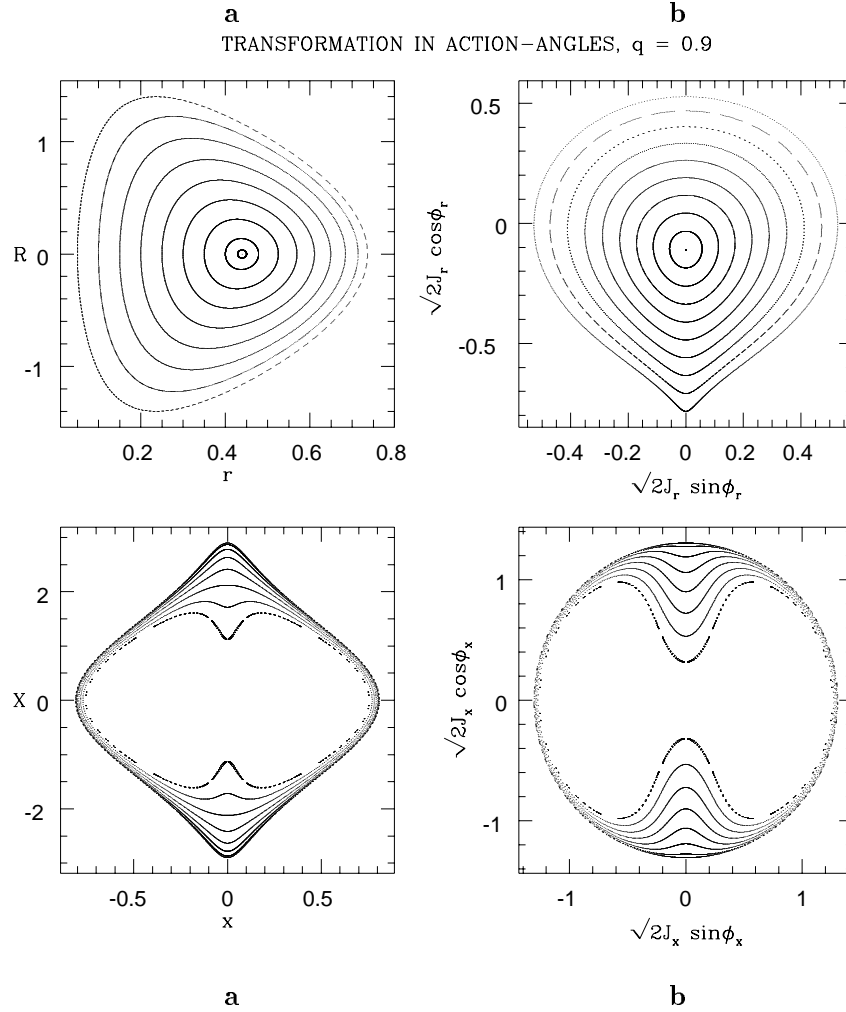


Figure 3.7 : Transformation en variables action-angle des régions de la surface de section occupées par des orbites “boucle” (**a** et **b**) et par des orbites “boîte” (**c** et **d**), pour $q = 0.9$

Comme dans le cas du système rectiligne, la précision dans la détermination des fréquences fondamentales obtenues par l’analyse en fréquence est excellente, environ 10^{-6} pour les variables originales r, R et θ, Θ , et même 10^{-9} pour les variables action-angle. Les trajectoires du plan (r, R) des variables originales ont été transformées en cercles sur une surface de section $\varphi_\theta = \varphi_{\theta 0}$ de l’espace des phases représenté dans les variables action-angle (Figure 3.6b).

3.5.3 Hamiltonien général

Nous allons considérer maintenant le hamiltonien général du système plan donnée par l’équation (3.1). Ce hamiltonien pourrait être traité comme une perturbation du modèle rectiligne dans le cas des orbites “boîte” (équation (3.4)). Pour les régions de l’espace des phases occupées par les orbites “boucle”, on pourrait considérer que le hamiltonien général est une perturbation du hamiltonien correspondant au modèle central (équation (3.8)). En principe, pour ces deux régions distinctes de l’espace des phases, les variables action-angle des approximations

intégrables doivent être un choix plus adapté pour l'étude de la dynamique du système. Suivant une approche semi-numérique/semi-analytique conçue par Henrard [88], nous utiliserons les transformations numériques précédentes en variables action-angle. L'analyse en fréquence nous permettra d'évaluer l'amélioration réalisée sur la convergence des séries quasi-périodiques en utilisant cette transformation soi disant optimal.

Nous considérons un système proche du cas central, pour $q = 0.9$ et $R_c = 0.1$, et une valeur de l'énergie $h = -0.40589$. Pour les orbites "boîte", nous faisons la transformation $(x, X, y, Y) \longrightarrow (\varphi_x, J_x, y, Y)$, où (J_x, φ_x) sont les variables action-angle du système logarithmique à 1 degré de liberté (équation (2.28)), tandis que pour les orbites "boucle", nous utilisons la transformation $(x, X, y, Y) \longrightarrow (\varphi_r, J_r, \varphi_\theta, J_\theta)$ en variables action-angle du système central (3.5). Ces deux transformations locales sont appliquées dans des régions disjointes de l'espace des phases, séparées par la petite zone chaotique autour de l'orbite hyperbolique oscillant le long de l'axe des y (Figures 3.1, 3.7c).

Tableau 3.9 : Analyse en fréquence de l'orbite "boucle" \mathcal{L}_1 exprimée en variables polaires (variables r, R)

k	ω_k	A_k	ϕ_k	n_k	n'_k	$\delta\omega_k$
1	-.00000220	.4779836	.00	0	0	.00000220
2	-4.30617586	.3630382	79.19	1	0	.00000000
3	4.30617615	.2262020	100.81	-1	0	.00000029
4	-5.89727928	.0989042	215.45	0	2	.00000917
5	-8.61235478	.0806982	338.38	2	0	.00000305
6	8.61237043	.0639075	201.60	-2	0	.00001870
7	5.89728996	.0702250	324.54	0	-2	.00000152
8	-10.20345929	.0470836	114.64	1	2	.00000502
9	10.20345895	.0386784	65.36	-1	-2	.00000536
10	-12.91849910	.0221793	237.54	3	0	.00002850
11	12.91849941	.0189923	302.46	-3	0	.00002820
12	-14.50964206	.0199772	13.84	2	2	.00000189
13	14.50964187	.0174011	166.16	-2	-2	.00000170
14	-2.71488577	.0094154	122.71	2	-2	.00017752
15	-1.59116869	.0082157	316.34	-1	2	.00005611
16	-18.81580467	.0080858	273.01	3	2	.00001136
17	-11.79386928	.0072512	250.08	0	4	.00070760
18	18.81580467	.0072697	267.02	-3	-2	.00001137
19	-17.22430047	.0065606	136.28	4	0	.00040299
20	-16.10042343	.0060872	149.71	1	4	.00032932

En particulier, nous avons appliqué cette transformation à l'orbite "boîte" \mathcal{B}_1 et l'orbite "boucle" \mathcal{L}_1 , étudiées dans la Section 3.4. Les résultats de l'analyse en fréquence des orbites exprimées dans des variables $(\sqrt{2J_x} \cos \varphi_x, \sqrt{2J_x} \sin \varphi_x)$ et $(\sqrt{2J_r} \cos \varphi_r, \sqrt{2J_r} \sin \varphi_r)$, respectivement, sont présentées sur les Tableaux 3.8 et 3.10. Nous pouvons comparer directement les Tableaux 3.1 et 3.9. En effet, la convergence des séries exprimées en variables action-angle est plus rapide. Nous pouvons remarquer que les amplitudes des termes non-couplés (dont l'argument est $m\nu$) sont nettement plus petites, tandis que les termes couplés (des combi-

Tableau 3.10 : Analyse en fréquence de l'orbite “boucle” \mathcal{L}_1 exprimée en variables action-angle $(\varphi_r, J_r, \varphi_\theta, J_\theta)$ (comparer au Tableau 3.9)

k	$\nu_{J_r k}$	$A_{J_r k}$	$\phi_{J_r k}$	$n_{J_r k}$	$n'_{J_r k}$	$\delta \nu_{J_r k}$
1	-4.30617673	.2941509	169.19	1	0	.00000000
2	-5.89728950	.0950987	305.46	0	2	.00000000
3	5.89728718	.0099886	234.54	0	-2	.00000232
4	10.20346121	.0053221	335.36	-1	-2	.00000502
5	-2.71482421	.0044270	212.64	2	-2	.00023975
6	1.59113039	.0038788	313.71	1	-2	.00001763
7	-1.59110821	.0038254	46.26	-1	2	.00000455
8	-10.20346555	.0039510	204.65	1	2	.00000068
9	.00000105	.0019731	270.00	0	0	.00000105
10	14.50964906	.0021825	76.15	-2	-2	.00000610
11	16.10076513	.0012457	299.88	-1	-4	.00000940
12	11.79462901	.0012015	199.02	0	-4	.00005002
13	-14.50965500	.0013155	103.86	2	2	.00001205
14	-11.79460063	.0009256	340.94	0	4	.00002164
15	7.48823050	.0008955	278.48	1	-4	.00017176
16	-16.10075503	.0008570	240.11	1	4	.00000070
17	20.40692826	.0007727	40.70	-2	-4	.00000419
18	18.81586116	.0008134	176.95	-3	-2	.00004147
19	-20.40692545	.0004884	139.29	2	4	.00000700
20	-18.81586036	.0004624	3.04	3	2	.00004068

naisons linéaires des deux fréquences) ont a peu près la même amplitude. En effet, en utilisant les variables action-angle, nous pouvons réduire que la “partie intégrable” du hamiltonien. D'autre part l'effet du couplage avec l'autre degré de liberté persiste, étant donné que nous ne pouvons pas l'éliminer à partir de cette transformation. Dans le cas des orbites “boucle” \mathcal{L}_1 , nous pouvons observer que le seul terme non-couplé est le premier comme la transformation en variables action-angle a éliminé tous les harmoniques du type $m\nu$. Comme dans les cas précédents, les termes couplés ont la même amplitude pour les deux types d'approximation. Toutefois, les solutions correspondant aux variables action-angle convergent plus rapidement.

Ensuite, nous avons appliqué la transformation numérique à plusieurs orbites “boîte” et nous avons déterminé la fréquence fondamentale ν_x dans les variables rectangulaires, et dans les variables action-angle pour chacune d'entre elles (ν_{J_x} , voir Tableau 3.11). Encore une fois, nous pouvons observer un accord excellent entre les fréquences fondamentales déterminées avec deux manières différentes, dont la précision décroît pour des orbites approchant la zone chaotique. Sur les Figures 3.7c et 3.7d nous représentons la surface de section pour les régions de l'espace des phases couvertes par des orbites “boîte” ($y = 0$). L'orbite approchant la zone qui sépare le deux types de mouvements, la perturbation croît et les tores deviennent de plus en plus déformés.

La même approche peut être aussi suivie pour plusieurs orbites “boucle” (Tableau 3.12). Les fréquences ν_r and ν_θ sont obtenues par l'application de l'analyse en fréquence dans les variables polaires (r, R, θ, Θ) , tandis que les fréquences ν_{J_r} et ν_{J_θ} sont déterminées par les

Tableau 3.11 : Détermination de la fréquence fondamentale pour plusieurs orbites “boîte” en utilisant une analyse en fréquence de la solution exprimée dans les coordonnées x, X (ν_x) et dans les variables action-angle (ν_{J_x}). La précision est $\delta\nu = |\nu_x - \nu_{J_x}|$

ν_x	ν_{J_x}	$\delta\nu$
-2.13905124	-2.13905196	$7 \cdot 10^{-7}$
-2.13943306	-2.13943376	$7 \cdot 10^{-7}$
-2.14057472	-2.14057544	$7 \cdot 10^{-7}$
-2.14246683	-2.14246756	$7 \cdot 10^{-7}$
-2.14509965	-2.14510022	$6 \cdot 10^{-7}$
-2.15259497	-2.15259583	$9 \cdot 10^{-7}$
-2.16326131	-2.16326193	$6 \cdot 10^{-7}$
-2.17779353	-2.17779420	$1 \cdot 10^{-6}$
-2.19807836	-2.19808359	$3 \cdot 10^{-6}$
-2.22970984	-2.22970970	$1 \cdot 10^{-6}$

approximations quasi-périodiques des variables action-angle $(J_r, \varphi_r, J_\theta, \varphi_\theta)$. Dans ce cas, nous avons été trouvé en face d’une difficulté. Bien que la détermination de la première fréquence ν_r est très bonne, le désaccord entre ν_θ et ν_{J_θ} est assez grand (jusqu’à l’ordre de 10^{-2}). Nous pourrions penser que la fréquence qui est mal déterminée est celle associée aux variables initiales (ν_θ). Mais, en effet, le problème apparaît à cause de la transformation en variables action-angle $(J_\theta, \varphi_\theta)$, quand la perturbation est assez élevée, ou quand les orbites approchent la singularité à $r = 0$. La transformation en variables (J_r, φ_r) ne fait pas l’objet d’une telle instabilité et nous pouvons déterminer la deuxième fréquence ν_{J_θ} en tenant en compte que dans l’expansion quasi-périodique de $\sqrt{2J_r} \exp i\varphi_r$ (Tableau 3.10), le second terme correspond à $2\nu_{J_\theta}$. Nous désignons la fréquence obtenue de cette façon ν'_{J_θ} . Nous pouvons observer alors, que la détermination de cette fréquence est en accord avec la détermination directe de ν_θ (Tableau 3.12).

Bien que ce résultat devient claire par la proposition rigoureuse de Laskar [110]⁴ nous avons vérifié numériquement que, quand les vraies variables action-angle existent, c.-à-d. quand le hamiltonien est intégrable, les fréquences déterminées en utilisant l’algorithme NAFF sont en effet les fréquences conjuguées aux mouvements quasi-périodiques sur les tores KAM. En outre, l’approximation quasi-périodique obtenue par l’analyse en fréquence peut être considérée comme une paramétrisation de ces tores. En plus, même dans le cas non-intégrable, nous pouvons avoir confiance sur la détermination des fréquences par la méthode, dans les régions régulières de l’espace des phases.

Malheureusement, la perturbation étant augmentée, la transformation en variables action-angle n’améliore pas la précision sur la détermination des fréquences fondamentales et le gain sur la convergence des approximations quasi-périodiques n’est pas très important. En effet, cette convergence devient de moins en moins bonne quand le système s’éloigne du cas central. Nous pouvons visualiser cela sur les Figures 3.8 et 3.9 où nous représentons les transformations en variables action-angle des régions de l’espace des phases qui correspondent aux orbites “boîte”

⁴Il faut noter que Laskar a prouvé la proposition sur la précision de l’analyse en fréquence après ce travail. Nous devons ajouter aussi qu’il existaient déjà des résultats numériques semblables en ce qui concerne la précision numérique de la méthode (voir par exemple [111]).

Tableau 3.12 : Détermination de la fréquence fondamentale pour plusieurs orbites “boucle” en appliquant l’analyse en fréquence dans les solutions exprimées dans les variables originales r, R et θ, Θ (ν_r, ν_θ) et dans les variables action-angle ($\nu_{J_r}, \nu_{J_\theta}$)

ν_r	ν_{J_r}	$\delta\nu_r$	ν_θ	ν_{J_θ}	$\delta\nu_\theta$	ν'_{J_θ}	$\delta\nu'_\theta$
-4.2745982	-4.2745994	$9 \cdot 10^{-6}$	-2.9607964	-2.9631	$2 \cdot 10^{-3}$	-2.9607994	$1 \cdot 10^{-6}$
-4.2765716	-4.2765630	$9 \cdot 10^{-6}$	-2.9601617	-2.9614	$1 \cdot 10^{-3}$	-2.9601627	$1 \cdot 10^{-6}$
-4.2825091	-4.2825050	$4 \cdot 10^{-6}$	-2.9581583	-2.9579	$2 \cdot 10^{-4}$	-2.9581592	$1 \cdot 10^{-6}$
-4.3061759	-4.3061767	$9 \cdot 10^{-7}$	-2.9486442	-2.9422	$6 \cdot 10^{-3}$	-2.9486447	$5 \cdot 10^{-7}$
-4.3239065	-4.3239058	$4 \cdot 10^{-6}$	-2.9397539	-2.9266	$1 \cdot 10^{-2}$	-2.9397553	$1 \cdot 10^{-6}$
-4.3457073	-4.3457047	$6 \cdot 10^{-6}$	-2.9265129	-2.9031	$2 \cdot 10^{-2}$	-2.9265228	$1 \cdot 10^{-5}$
-4.3721580	-4.3721559	$2 \cdot 10^{-6}$	-2.9066404	-2.8756	$3 \cdot 10^{-2}$	-2.9066441	$4 \cdot 10^{-6}$
-4.4040171	-4.4040128	$4 \cdot 10^{-6}$	-2.8764637	-2.8511	$2 \cdot 10^{-2}$	-2.8764618	$2 \cdot 10^{-6}$
-4.4451173	-4.4451173	$4 \cdot 10^{-8}$	-2.8271660	-2.8386	$1 \cdot 10^{-2}$	-2.8271643	$2 \cdot 10^{-6}$
-4.5175352	-4.5175352	$2 \cdot 10^{-8}$	-2.7202506	-2.7211	$1 \cdot 10^{-2}$	-2.7202146	$4 \cdot 10^{-5}$

(c-d) et “boucle” (a-b), pour $q = 0.8$ et $q = 0.7$, respectivement. Nous voyons clairement que l’espace des phases représenté en variables action-angle n’apparaît pas être moins “perturbé” que la surface de section correspondant aux variables originales.

Finalement, nous pensons que la procédure la plus simple et efficace consiste à appliquer la méthode d’analyse en fréquence directement dans les variables originales, (x, X, y, Y) pour les orbites “boîte”, et (r, R, θ, Θ) pour les orbites “boucle”, sans essayer de les transformer en variables action-angle. En effet, dans notre étude nous avons envisagé un problème commun dans les systèmes dynamiques, que les variables d’actions ne sont pas définies proprement dans le cas des systèmes non-intégrables, quand la perturbation n’est pas suffisamment petite. Nous pourrions chercher des variables d’actions locales près de tores KAM [137], [189] mais ces dernières méthodes nécessitent des algorithmes numériques très compliqués qui échouent au voisinage des résonances. Nous croyons alors qu’au lieu de chercher des actions approximées, il semble plus approprié d’utiliser les fréquences approximées, qui sont introduites plus naturellement et sont calculées beaucoup plus facilement.

3.6 Comparaison avec des travaux antérieurs

Binney et Spergel [20] ont déjà appliqué une analyse de Fourier raffinée au potentiel logarithmique plan qui a partiellement motivé la première partie de ce travail. Cette méthode présente quelques similarités avec la méthode d’analyse en fréquence, qui a évolué indépendamment dans les études de Laskar pour la stabilité du système solaire [106], [107]. La méthode d’analyse en fréquence a été révélée très efficace pour l’étude des plusieurs systèmes dynamiques [106], [107], [108], [111], [62], [112], [113], [109] et il était intéressant de voir si elle constituait un outil efficace pour des études de la dynamique galactique.

L’analyse en fréquence de Laskar présente deux aspect fondamentaux : a) la détermination d’une approximation quasi-périodique des solutions d’un système hamiltonien, et b) l’étude de l’application fréquence (“frequency map”, équation (3.26)). Ce deuxième aspect de la méthode,

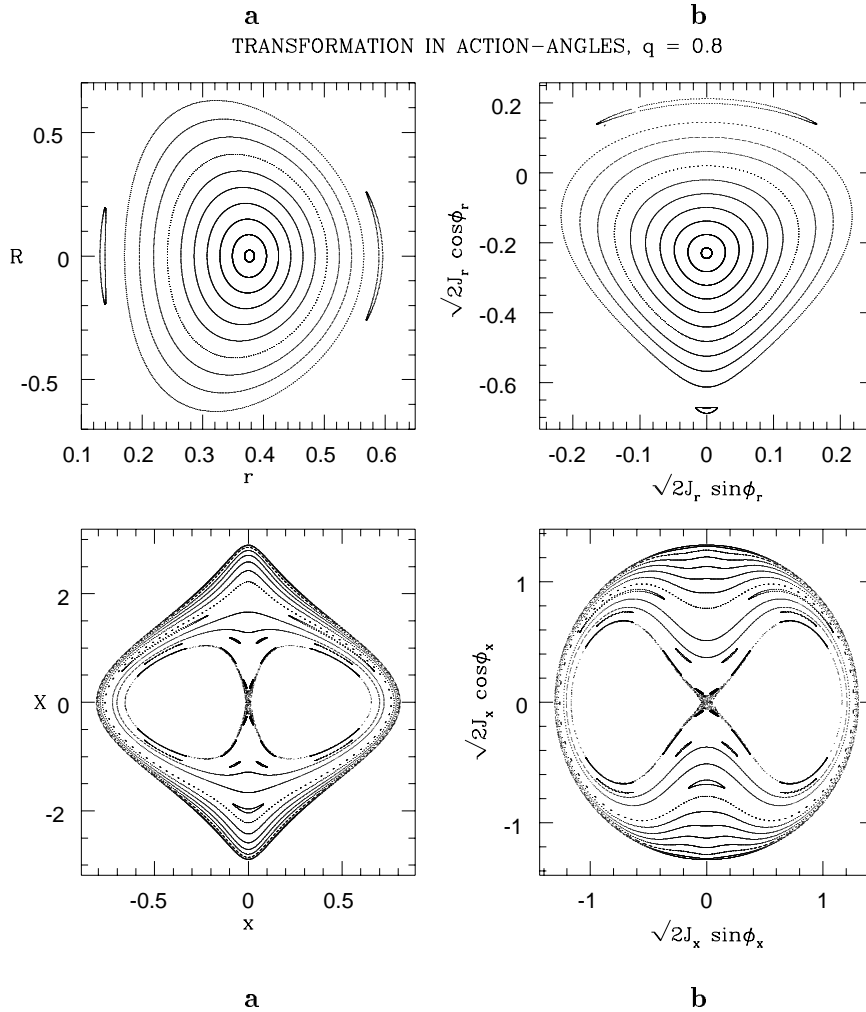


Figure 3.8 : Transformation en variables action-angle pour les régions de la surface de section occupée par les orbites “boucle” (**a** et **b**) et par les orbites “boîte” (**c** et **d**) pour $q = 0.8$

dont l’application dans le système logarithmique plan sera l’objet de la section suivante, est absent de l’approche de Binney et Spergel [20]. En effet, leur préoccupation principale était l’étude des solutions régulières, en suggérant que toutes (ou presque) les orbites du système étaient quasi-périodiques.

Dans leur travail, ils ont construit une approximation quasi-périodique des solutions obtenues numériquement pour un intervalle de temps fini. Néanmoins, la précision de cette approximation est moins bonne en comparaison avec celle de l’analyse en fréquence, qui était originalement désignée pour reproduire des éphémérides planétaires à long terme. En particulier, l’utilisation d’une fonction de poids comme filtre (la fonction de Hanning (3.22)) peut améliorer considérablement la précision sur la détermination des fréquences fondamentales [110]. En effet, la détermination directe des fréquences fondamentales (équations (3.20), (3.21)) est censé d’être beaucoup plus précise que l’application d’une méthode de moindres carrés [20]. Suivant le résultat rigoureux de Laskar [110], la précision sur la détermination des fréquences fondamentales pour des orbites quasi-périodiques est de l’ordre de $1/T^4 \approx 10^{-6}$ pour environ 25

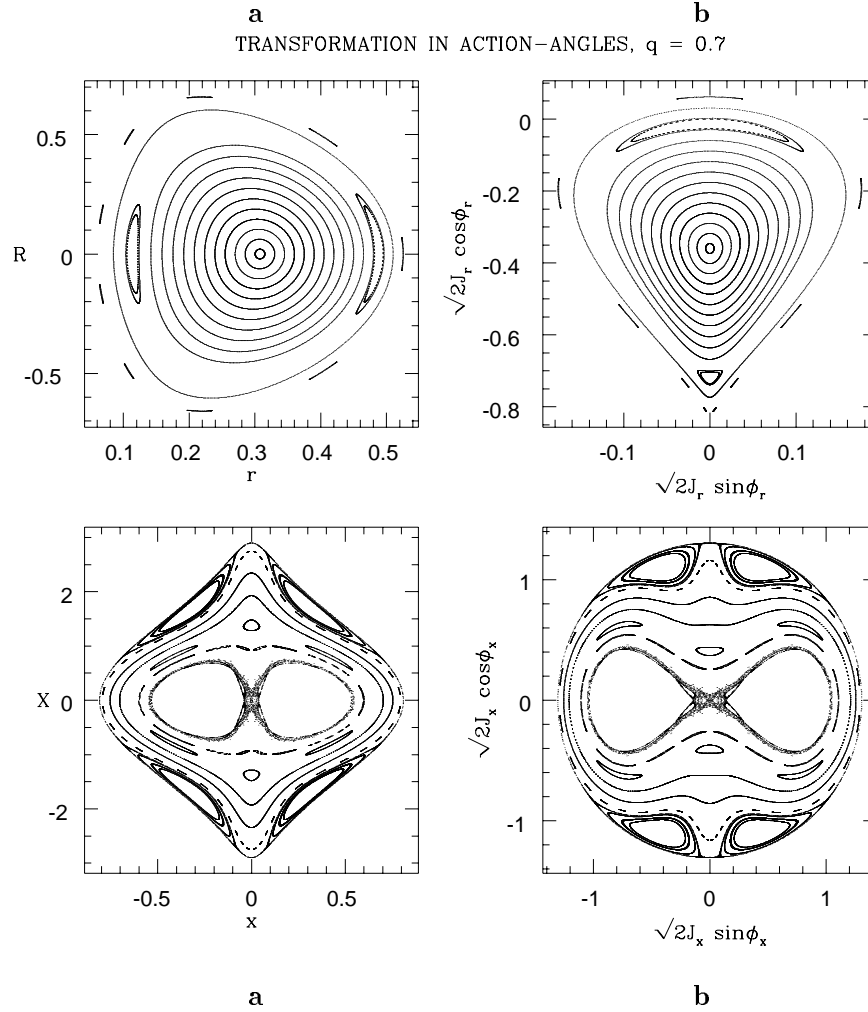


Figure 3.9 : Transformation en variables action-angle pour les régions de la surface de section occupée par des orbites “boucle” (**a** et **b**) et par des orbites “boîte” (**c** et **d**) pour $q = 0.7$

périodes orbitales (définie comme la période de l’orbite périodique oscillant sur le grand axe du système logarithmique). Celle-ci est 4 ordres de grandeur supérieur à la précision habituelle d’une FFT ($\delta\nu \approx 1/25 \approx 1 \cdot 10^{-2}$) et 3 ordres de grandeur supérieur à la précision obtenue par la méthode de Binney et Spergel ($4 \cdot 10^{-4}$), pour le même intervalle de temps. Nous devons souligner que la méthode d’analyse en fréquence peut atteindre le seuil de la précision de l’intégrateur numérique (10^{-12}) pour seulement 10^3 périodes [111].

Après avoir déterminé chaque fréquence ν_i , les deux méthodes obtiennent l’amplitude correspondante par une projection de la fonction numérique f sur l’espace généré par les termes harmonique $\exp(i\nu_k t)$. Toutefois, comme tous les différents termes du type $(\exp(i\nu_k t))_k$ ne sont pas orthogonaux, il est nécessaire d’orthogonaliser itérativement, pour chaque projection (nous utilisons un algorithme d’orthogonalisation de Gram-Schmidt [158]). Cette orthogonalisation étant absente de la méthode de Binney et Spergel [20], la précision de la détermination de l’approximation quasi-périodique est limitée.

En effet, nous pouvons tester directement la précision sur la détermination des séries quasi-

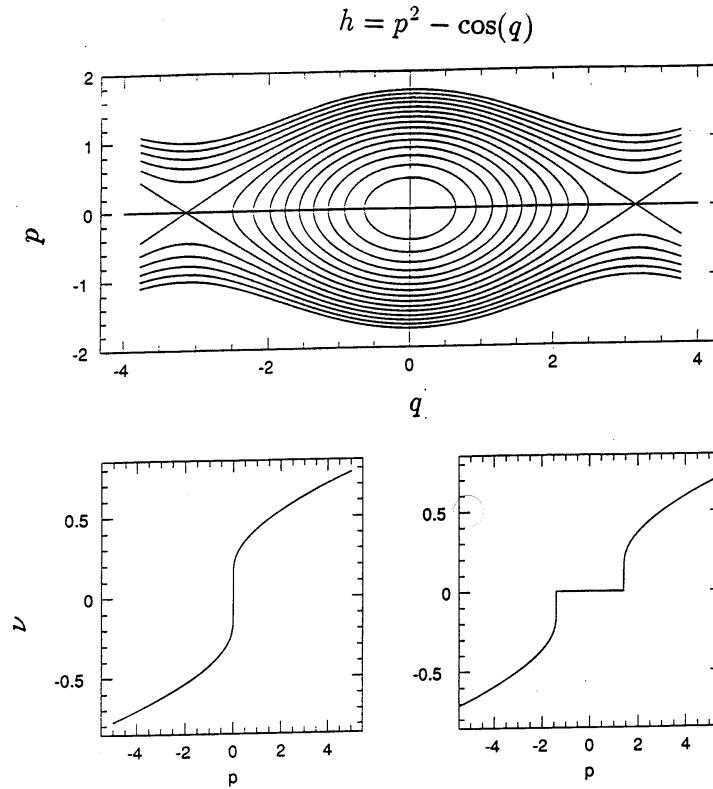


Figure 3.10 : Comportement de la fréquence en fonction de la variable d'action pour des coupes de l'espace des phases du pendule (d'après Laskar [108])

périodiques en calculant les résidus entre la solution obtenue par la méthode de Runge-Kutta, et son approximation sous la forme de la série (3.28) définie par l'analyse en fréquence. L'erreur correspondant est de l'ordre de 10^{-8} pour 40 périodes orbitales, 6 ordres de grandeur plus petit que la valeur de ce que Binney et Spergel appelle "incompletence" i , définie comme la mesure de la précision avec laquelle un mouvement donné peut être représenté comme une série des harmoniques. Nous devons ajouter que dans leur travail [20] le test est fait seulement pour 25 termes de la série, tandis que la série de l'équation (3.28) contient typiquement 40 termes.

Indépendamment des points techniques précédents, les deux travaux sont différents par rapport à la manière et les moyens d'approche d'un système pour pouvoir expliquer ces aspects dynamiques. Binney et Spergel étaient plutôt intéressée de la structure de l'espace de configuration du système et leurs approximations quasi-périodiques ont été obtenues directement dans les variables $x(t)$ et $y(t)$. Ils ont aussi observé que les spectres des solutions $x(t)$ et $y(t)$ étaient formés par des lignes spectrales distinctes sous la forme $m\nu + m'\nu'$, en opposant d'un spectre continu qui est l'indication d'un mouvement chaotique, suivant les études de Percival [150] et Noid *et al.* [142], [143] dans la chimie quantique (cf. [188] et pour plus des détails

on peut se référer au livre de Gutzwiller [82], p. 220). Pour pouvoir accomplir ces buts, la précision de leur méthode était suffisante, comme ils n’ont pas cherché à étudier des détails fins de la dynamique du système. En effet, ils considèrent seulement l’existence des orbites régulières, bien que, même pour $q = 0.9$, une surface de section simple (Figure 3.1) montre que des orbites chaotiques existent. Ce fait est encore plus facile à observer quand la valeur de q décroît (Figures 3.8 et 3.9), et nous allons aussi le montrer dans la section suivante en utilisant les applications fréquence. De plus, dans leur travail, le lien entre les fréquences fondamentales numériquement déterminées et les fréquences “canoniques” des tores KAM associés n’est pas établie. C’est probablement la raison pour laquelle dans des études suivantes, Binney et ses collaborateurs ont continué la recherche pour développer un algorithme qui pourrait reconstruire les tores KAM, en s’appuyant sur la détermination des variables action-angle [21], [127], [19], [95]. Notons que Contopoulos [37], en utilisant des approximations explicites fournies par la théorie de la troisième intégrale, a aussi réussi de calculer des nombres de rotation dans le cas d’un potentiel galactique.

La méthode d’analyse en fréquence s’appuie à des caractéristiques spécifiques des systèmes hamiltoniens, pour l’étude de leur dynamique globale. D’abord, la méthode est appliquée dans le cadre d’un système hamiltonien perturbé (équation (3.15)), comme nous avons mentionné dans la Section 3.3. Dans ce cas, les tores KAM sont associés avec les variables action-angle $\zeta_j(t) = I_j \exp(i\theta_j)$ exprimées sous la forme d’une série quasi-périodique (3.14). Le résultat de l’algorithme NAFF est une approximation tronquée de cette expansion quasi-périodique (3.16). Il faut souligner que, pour formuler ces résultats, on doit considérer la dynamique de toute l’espace des phases et non seulement de l’espace de configuration. C’est pour cette raison que l’expression des solutions sous une forme complexe ($x(t) + iX(t)$ et $y(t) + iY(t)$) est nécessaire. De plus, la précision élevée des approximations quasi-périodiques des solutions permet la détermination précise des harmoniques d’ordre supérieur. Nous avons aussi démontré dans les Sections 3.4 et 3.5 que cette analyse sur la convergence des séries peut fournir des informations sur la possibilité d’utiliser des variables plus adaptées et sur l’interaction entre les différents degrés de liberté du système.

Après avoir confirmé l’efficacité de l’analyse en fréquence pour déterminer avec une grande précision le vecteur fréquences des tores KAM conjugués aux mouvements quasi-périodiques, nous pouvons maintenant construire les applications fréquence (3.26). Dans la section suivante nous étudions la régularité de ces applications, qui fournissent des informations importantes sur la dynamique globale du système logarithmique plan.

3.7 Applications fréquence (“frequency maps”)

Pour la construction de l’application fréquence, nous devons fixer à des valeurs arbitraires les variables correspondant aux “angles” du système. Plus précisément, il faut choisir une section de l’espace des phases qui est transverse aux tores KAM que nous voulons étudier. En utilisant les variables (x, y, X, Y) , nous pouvons voir facilement par l’application de premier retour construite dans la Section 3.1 (Figure 3.1) que nous pouvons couvrir toutes les conditions initiales correspondant aux orbites “boîte” en posant $x = y = 0$ et en considérant la variable X comme variable d’action. En outre, dans le cas des orbites “boucle” nous pouvons considérer la section $y = X = 0$ et utiliser x comme variable d’action (Figure 3.1). Dans les deux cas, la dernière variable Y est calculée par la restriction du système sur une surface d’énergie constante $H_q(x, X, y, Y) = h$. Alors, nous pouvons construire les deux applications fréquence F_B et F_L ,

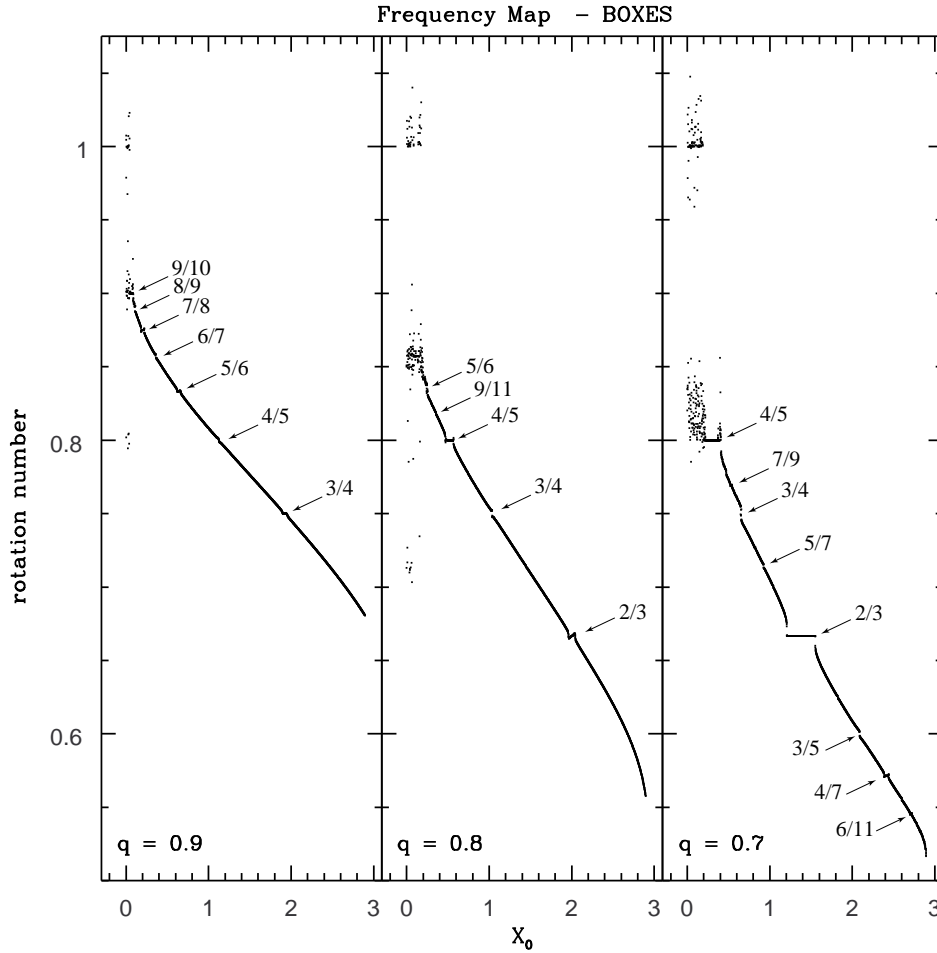


Figure 3.11 : Applications fréquence pour la région de l'espace des phases occupée par des orbites "boîte" pour trois valeurs de q (0.9, 0.8 et 0.7) correspondant à des cas "physiques"

pour les orbites "boîte" et "boucle", respectivement :

$$F_B : (0, X_{max}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X \longrightarrow \frac{\nu_x}{\nu_y} , \quad (3.54)$$

$$F_L : (0, x_p) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \frac{\nu_\theta}{\nu_r} , \quad (3.55)$$

où (ν_x, ν_y) sont les fréquences obtenues par l'analyse en fréquence pour les orbites "boîte" générées par les conditions initiales $(x, y, X, Y) = (0, 0, X_0, Y_0)$ pour un intervalle de temps $[0, \tau_B]$, tandis que (ν_θ, ν_r) sont les fréquences correspondant aux orbites "boucle" générées par des conditions initiales $(x, y, X, Y) = (x_0, 0, 0, Y_0)$, obtenues par l'analyse en fréquence pour le même intervalle de temps $[0, \tau_B]$ après une transformation en variables polaires (r, θ, R, Θ) . Il faut noter que X_{max} est égale à la valeur maximale de la variable X et x_p est la valeur de la

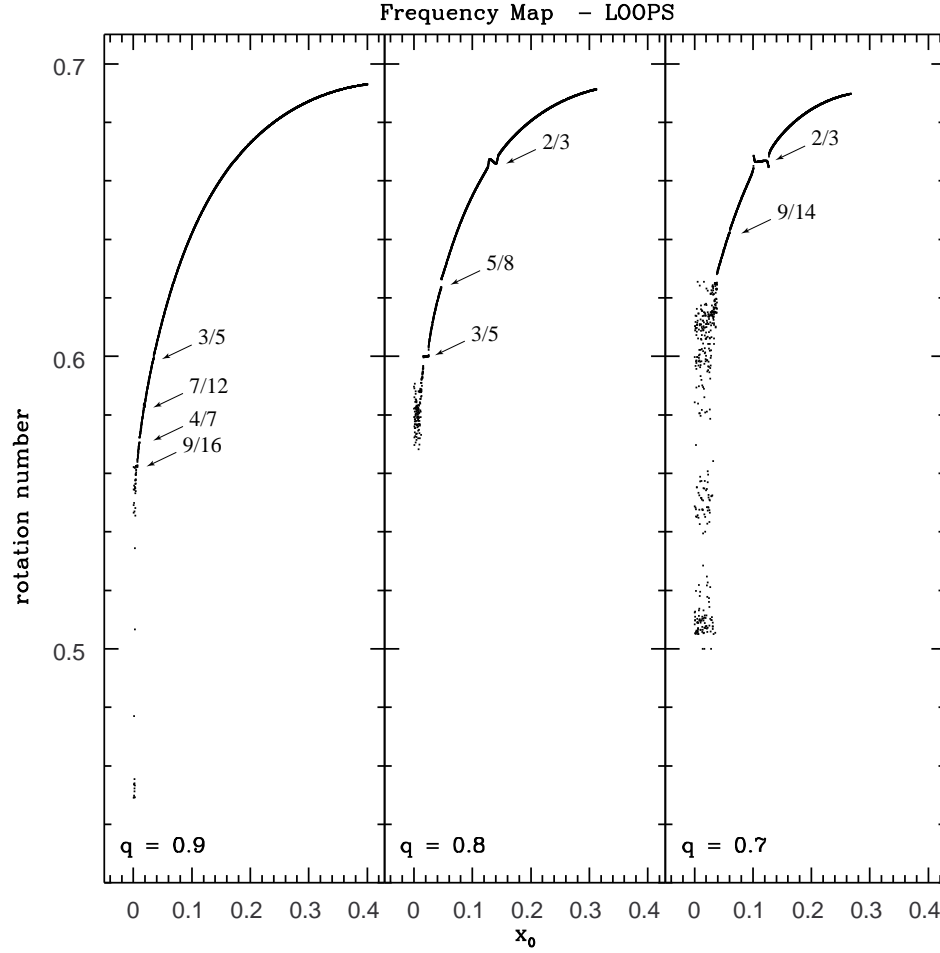


Figure 3.12 : Applications fréquence pour la région de l'espace des phases occupée par des orbites “boîte” pour trois valeur de q (0.9, 0.8 et 0.7) correspondant à des cas “physiques”

variable x correspondant à l'orbite périodique “boucle”. En pratique, le temps τ_B correspond à environ 90 périodes orbitales et nous choisissons 3000 conditions initiales pour la construction des applications fréquence F_B et F_L .

3.7.1 Cas “physiques”

Les applications fréquence F_B et F_L , pour trois valeurs physiquement acceptables de q ($q = 0.9, 0.8$ et 0.7) sont présentées sur les Figures 3.11 et 3.12. Dans ces diagrammes, nous représentons le nombre de rotation $\frac{\nu_x}{\nu_y}$ pour les orbites “boîte” et $\frac{\nu_\theta}{\nu_r}$ pour les orbites “boucle”) en fonction de la variable d'action correspondante (X_0 pour les orbites “boîte” et x_0 pour les orbites “boucle”). Nous commençons notre étude par la Figure 3.11c où les caractéristiques principales des applications fréquence sont plus visibles. D'abord, notons que l'application fréquence F_B est une courbe à 1 dimension qui réunit d'information correspondant à un ensemble de 3000 conditions initiales différentes et chaque orbite est représentée simplement par un point. En effet, nous verrons que cette courbe simple fournit au moins la même quantité

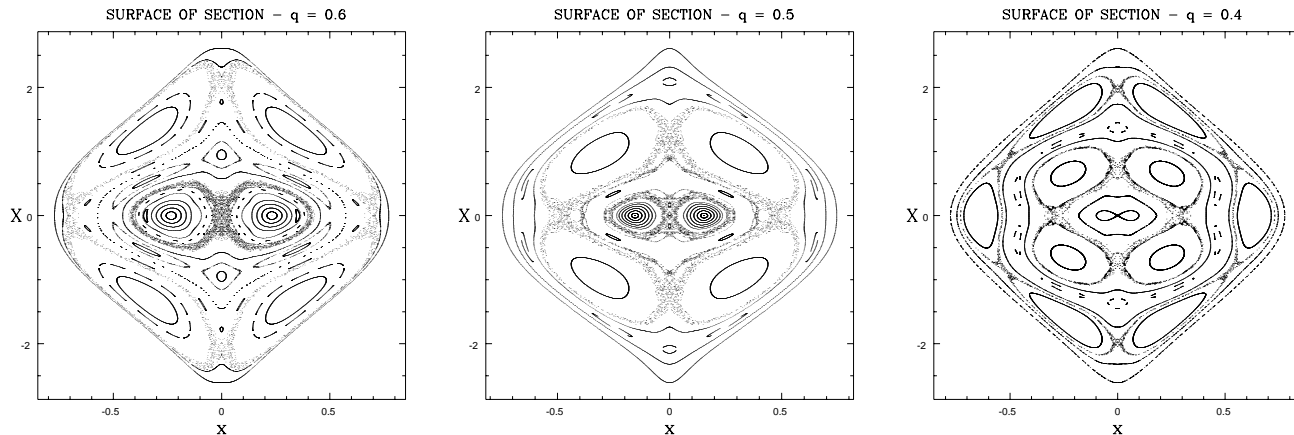


Figure 3.13 : Surfaces de section pour ($y = 0$) du système logarithmique pour $q = 0.6, 0.5$ et 0.4 . Comparer avec les applications fréquence des Figures 3.14 et 3.15

d'information que la surface de section de la Figure 3.9c.

La partie droite de l'application ($X \rightarrow X_{max}$) est très régulière, ainsi témoignant l'existence des plusieurs tores KAM dans cette région. Toutefois, nous pouvons observer quelques plateaux horizontaux et des lacunes verticales. En effet, le comportement de la fréquence en fonction d'une variable du type action peut être élucidé en étudiant le système hamiltonien du pendule considéré comme le paradigme du mouvement au voisinage de résonances (voir Figure 3.10, d'après Laskar [108]). Les plateaux peuvent être facilement identifiés comme des passages par des îles de résonance (le nombre de rotation est constant), tandis que les lacunes verticales correspondent à des points hyperboliques [108] (une singularité logarithmique sur le nombre de rotation). En effet, l'analyse en fréquence nous permet de détecter facilement toutes les résonances importantes. Notons que l'existence des résonances introduit des distorsions sur la courbe des fréquences et alors nous pouvons mesurer leur taille, soit par rapport au nombre de rotation, soit par rapport à la variable d'action correspondante. En outre, la valeur numérique des fréquences fournit immédiatement l'argument de la résonance correspondante. A titre d'exemple, le plateau le plus large sur la Figure 3.11c correspond au petit îlot sur l'axe des X de la Figure 3.9c et c'est une résonance $2/3$ entre ν_x et ν_y .

Comme nous avons indiqué dans la Section 3.3.3, pour un ensemble des conditions initiales qui correspondent à des tores KAM, la courbe des fréquences est régulière. D'autre part, quand elle n'est plus régulière, comme dans la partie gauche de la Figure 3.11c, on peut déduire que les tores KAM sont détruits et sont remplacés par une zone chaotique. La taille de cette zone peut être aussi mesurée en termes des fréquences ou en termes des actions. Nous pouvons voir clairement que, quand la perturbation augmente (c.-à-d. quand q décroît), la taille de la zone chaotique autour du point hyperbolique $x = X = 0$ (cf. Figure 3.1) est augmentée. En même temps, plusieurs résonances voisines se recouvrent suivant le critère empirique de Chirikov [29], [30] (décrit indépendamment par Rosenblath *et al.* [165] et Contopoulos [36]). En particulier, pour des orbites "boîte" nous observons sur les Figures successives 3.11a,b,c, l'élargissement de la résonance $4/5$ qui se trouve au bord de la zone chaotique pour $q = 0.7$. Pour les orbites "boucle", la zone chaotique s'éteint jusqu'à la résonance $5/8$ entre les fréquences ν_θ et ν_r . Pour $q = 0.7$, une plus grande proportion de l'espace des phases est couverte par des orbites

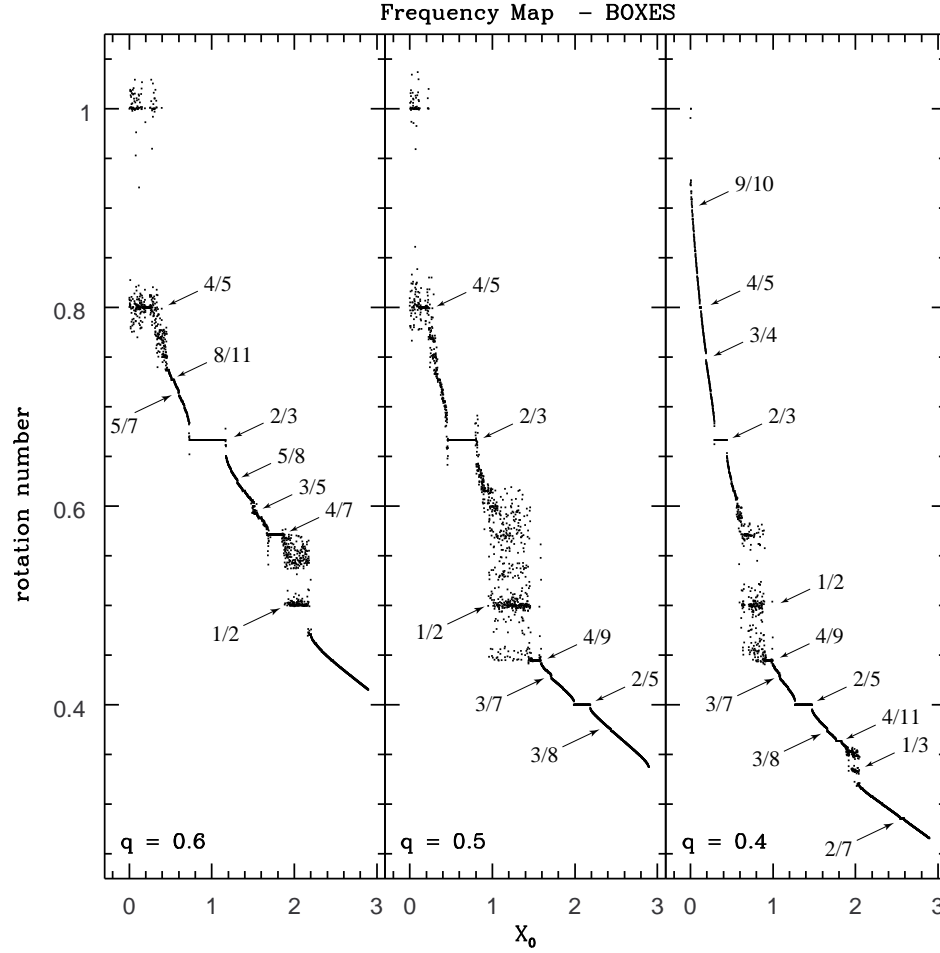


Figure 3.14 : Applications fréquence pour la région de l'espace des phases occupée par des orbites “boîte” pour trois valeurs de q (0.6, 0.5 et 0.4) correspondant à des cas “non-physiques”

irrégulières. Ce fait est en accord avec les conjectures des études précédentes [163], [21], [117], même si la taille de la zone chaotique était sous-estimée.

A part cette région chaotique, les orbites “boucle” et les orbites “boîte” apparaissent très régulières. Malgré l'apparition des plusieurs résonances, ces dernières sont assez isolées et leur comportement est similaire à celui du pendule. La régularité du système logarithmique plan a conduit plusieurs chercheurs d'inférer que les zones chaotiques ne peuvent pas jouer un rôle important dans les modèles galactiques. Néanmoins, les résonances isolées sont très intéressantes pour la dynamique du problème général à 3 dimensions, comme un petit couplage avec un degré de liberté supplémentaire peut élargir considérablement les zones chaotiques [108].

Nous pouvons aussi reconnaître facilement quelques caractéristiques intéressantes de la dynamique des orbites “boîte”. Dans la partie gauche de la Figure 3.11a ($q = 0.9$), nous observons quelques points hyperboliques ($4/7$, $3/5$) et quelques îlots de stabilité (résonances $9/16$, et $7/12$). Pour $q = 0.8$, la résonance $3/5$ devient plus visible. L'autre famille importante d'orbites correspond à la résonance $2/3$. Dans la littérature de la dynamique galactique, ces orbites sont appelées des orbites poissons (“fish orbits”, voir [136], [117]). La singularité la plus visible de

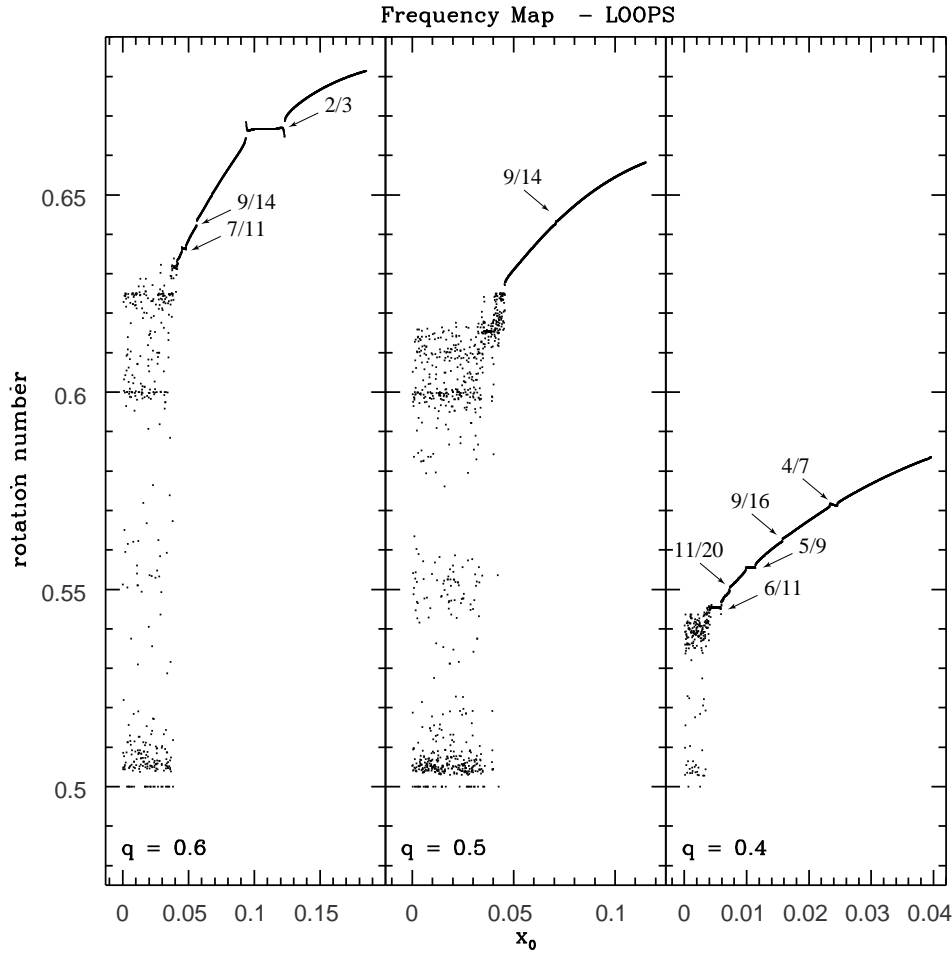


Figure 3.15 : Applications fréquence pour la région de l'espace des phases occupée par des orbites "boucle" pour trois valeur de q (0.6, 0.5 et 0.4) correspondant à des cas "non-physiques"

la courbe des fréquences correspond à une orbite périodique hyperbolique dont le nombre de rotation est $5/8$. Pour $q = 0.7$, la région chaotique et la résonance $2/3$ dominent la courbe des fréquences des orbites "boucle". Nous pouvons aussi remarquer le point hyperbolique $9/14$ et quelques résonances moins visibles.

Les applications fréquence pour les orbites "boîte" fournissent aussi quelques informations intéressantes. Pour $q = 0.9$, nous pouvons reconnaître quatre îles de libration ($9/10$, $7/8$, $5/6$, $3/4$), séparées par trois points hyperboliques correspondant aux résonances $8/9$, $6/7$ and $4/5$. Ces résonances apparaissent naturellement comme membres de la série de Farney \mathcal{F}_{10} des approximations rationnelles [84]. Pour $q = 0.8$, la résonance $4/5$ correspond à une île de libration. Nous pouvons aussi remarquer deux autres familles d'orbites importantes (résonances $3/4$ et $2/3$). On appelle ces orbites des gimblettes ("pretzels") et des poissons, respectivement [136], [117]. L'augmentation de la perturbation ($q = 0.7$) fait apparaître plusieurs résonances. Les îlots elliptiques les plus visibles correspondent aux résonances $4/5$, $2/3$, $4/7$ et $6/11$. On peut aussi remarquer l'existence des orbites hyperboliques (résonances $7/9$, $3/4$, $5/7$, $3/5$). Finalement, on peut observer une petite distorsion de la courbe des fréquences au voisinage de

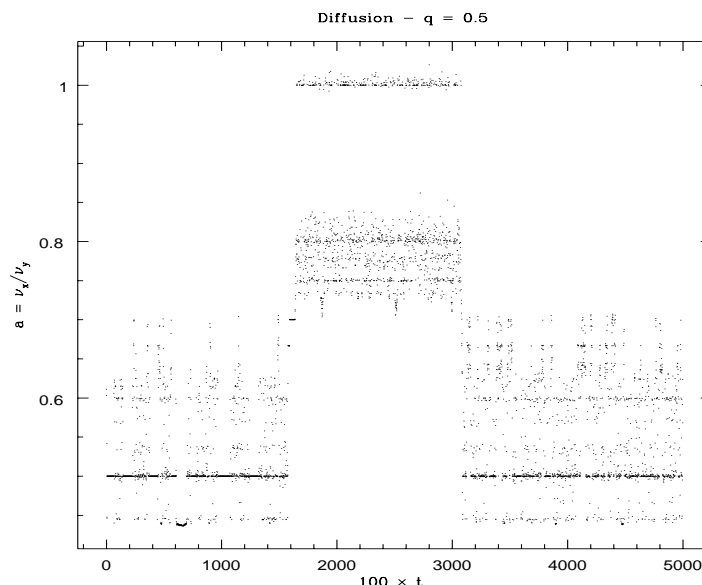


Figure 3.16 : Représentation de la diffusion d’une orbite irrégulière typique à l’intérieure de la zone chaotique, pour $q = 0.5$. Nous calculons pour plusieurs tranches du temps le nombre de rotation de l’orbite et nous représentons son évolution par rapport au temps

l’orbite périodique oscillant le long de l’axe des x . Ce dernier fait révéler le caractère hyperbolique de cette orbite (voir Figure 3.2).

3.7.2 Cas “non-physiques”

Nous avons souligné au début de ce chapitre, que pour $q < 0.6964$ et pour le niveau de l’énergie choisi ($h = -0.40589$), le modèle perd son sens physique, étant donné que la fonction de densité peut devenir négative (équation (3.12)). En dépit de ce fait, il est intéressant du point de vue dynamique d’étudier les applications fréquence pour des valeurs de q plus petites que la valeur critique de l’équation (3.12) (Figures 3.15, 3.14). A cause de la multitude des résonances observées dans les applications fréquence correspondant à la zone de circulation (orbites “boîte”), nous pouvons prédire que les zones chaotiques élargissent, quand la perturbation augmente. En effet, pour $q = 0.6$ les résonances proche de $1/2$ et $3/5$ sont recouvertes en produisant des régions chaotiques, ainsi que la région autour de l’orbite périodique y -axiale. Toutefois, nous observons encore quelques tores résonants qui persistent. Ils correspondent à plusieurs îles elliptiques (les plus importants sont associés aux résonances $4/5$, $2/3$ et $4/7$). Nous pouvons aussi voir quelques orbites hyperboliques. L’orbite périodique x -axiale étant elliptique pour cette valeur de q (Figure 3.2), la région proche de cette orbite est régulière. De l’autre côté, les applications fréquence des régions de libration (“boucle”) contiennent deux îles elliptiques principales correspondant aux résonances $7/11$ et $2/3$ et un point hyperbolique (résonance $9/14$), à part la zone chaotique qui s’étend jusqu’à la résonance $4/7$.

Pour $q = 0.5$, la majorité de l’espace des phases est remplie par des orbites irrégulières. Il est frappant que des orbites générées à l’intérieure de la zone chaotique autour de l’orbite hyperbolique y -axiale peuvent diffuser jusqu’à la zone chaotique autour de la résonance $1/2$.

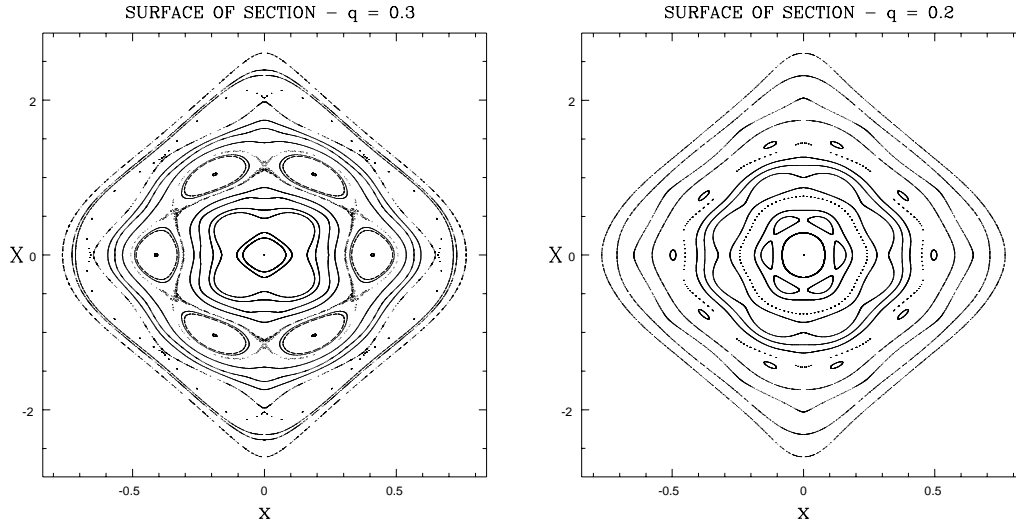


Figure 3.17 : Surfaces de section ($y = 0$) du système logarithmique pour $q = 0.3$ et 0.2 . Comparer avec les applications fréquence des figures 3.18 et 3.15

Cela nous pouvons le visualiser simplement sur la Figure 3.16. En effet, nous avons intégré pour un temps assez long (50000 périodes) une orbite qui se trouve à l'intérieur de la petite zone chaotique et nous avons calculé successivement l'évolution de son nombre de rotation, pour des tranches du temps correspondant à 100 périodes. Ainsi, nous pouvons avoir une image beaucoup plus représentative que les approches classiques (les exposants de Lyapounov, par exemple) sur la diffusion de l'orbite dans l'espace des phases. Nous pouvons clairement voir que l'orbite diffuse assez rapidement, jusqu'à la zone de libration (nombre de rotation égale à 1) et après elle revient dans la zone proche de la résonance $1/2$.

En faisant décroître q , la zone de libration est diminuée. Pour $q = 0.4$, seulement une petite fraction de l'espace des phases est occupée par des orbites de ce type. Nous discernons que la région chaotique autour de l'orbite périodique y -axiale est réduite. Nous avons déjà remarqué dans le diagramme de stabilité (Figure 3.2) que l'indice de stabilité de cette orbite approche la zone de stabilité ($|b| < 2$) mais il reste dans le régime hyperbolique, pour cette valeur de q . Encore un aspect intéressant est l'apparition de la zone chaotique créée autour de l'orbite hyperbolique correspondant à la résonance $1/3$. Comme avant, nous pouvons remarquer plusieurs distorsions de la courbe des fréquences correspondant à des résonances : nous pouvons remarquer trois îles de stabilité (résonances $6/11$, $5/9$ and $4/7$) et quelques orbites hyperboliques, parmi lesquelles la résonance $9/16$ est la plus visible.

Pour des valeurs de q plus petites que 0.3659 , les orbites du type "boucle" disparaissent. Ainsi, pour $q = 0.3$ et $q = 0.2$, on trouve seulement des orbites de circulation. Les applications fréquence correspondantes sont présentées sur la Figure 3.18. Nous apercevons trois petites régions chaotiques autour des résonances $1/2$, $1/3$, et $1/4$. L'orbite périodique y -axiale est elliptique, et donc, la courbe des fréquences est régulière au voisinage de cette orbite. En outre, plusieurs résonances nouvelles apparaissent, associées à des îles de libration, ($4/9$, $2/5$, $4/11$, $4/13$, $2/7$ et $2/9$) ou des points hyperboliques (résonances $3/7$, $3/8$, $3/10$, $3/11$ et $1/5$). Pour $q = 0.2$, la courbe des fréquences semble très régulière, contenant 5 points hyperboliques principales ($1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$, $1/7$) et quelques îles elliptiques (résonances $2/7$, $2/9$, $2/11$). La

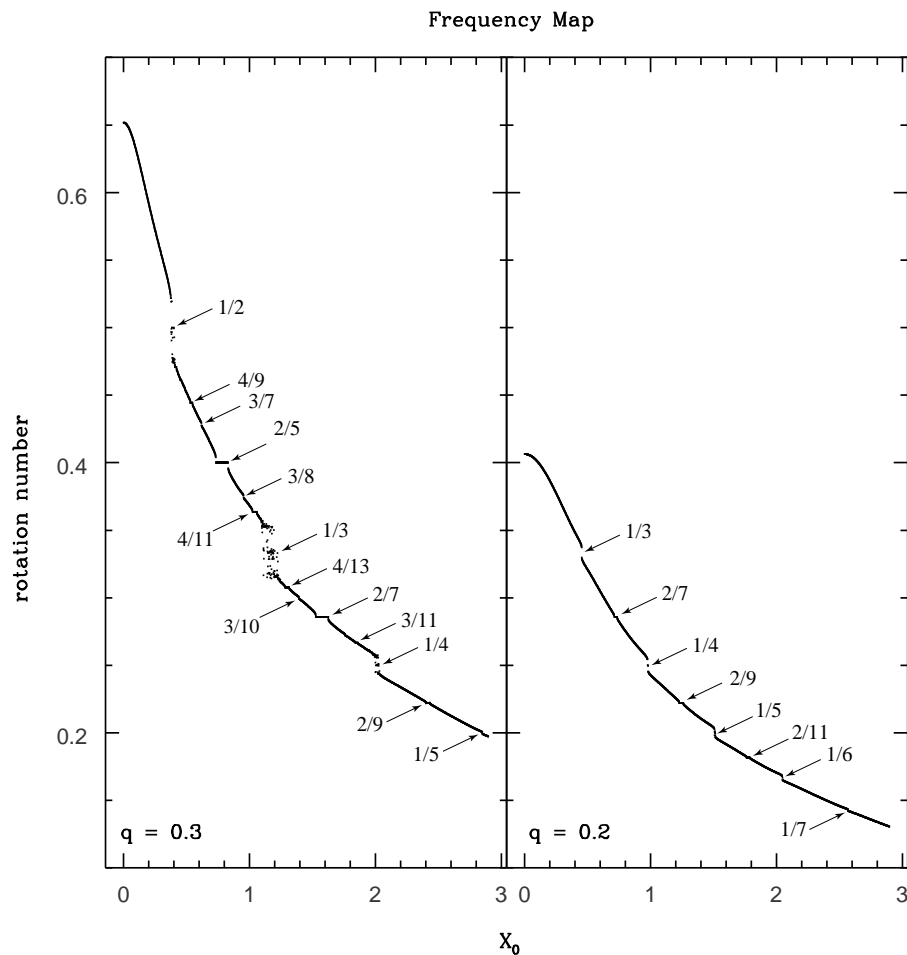


Figure 3.18 : Applications fréquence du système logarithmique pour deux valeurs de q (0.3 et 0.2).

régularité de l'espace des phases pour cette valeur du paramètre de perturbation est aussi très visible sur la Figure 3.17b, où nous représentons la surface de section correspondante. En effet, quand q devient petit (mais non nul), le hamiltonien du système plan peut être écrit comme une perturbation du système à 1 degré de liberté restreint sur le plan invariant (y, Y) :

$$H_q = H_0 + H' , \quad (3.56)$$

avec

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2}Y^2 + \ln(y^2/q^2) \\ H' &= \frac{1}{2}X^2 + \ln\left(1 + \frac{q^2(x^2 + R_c^2)}{y^2}\right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

3.7.3 Orbites périodiques

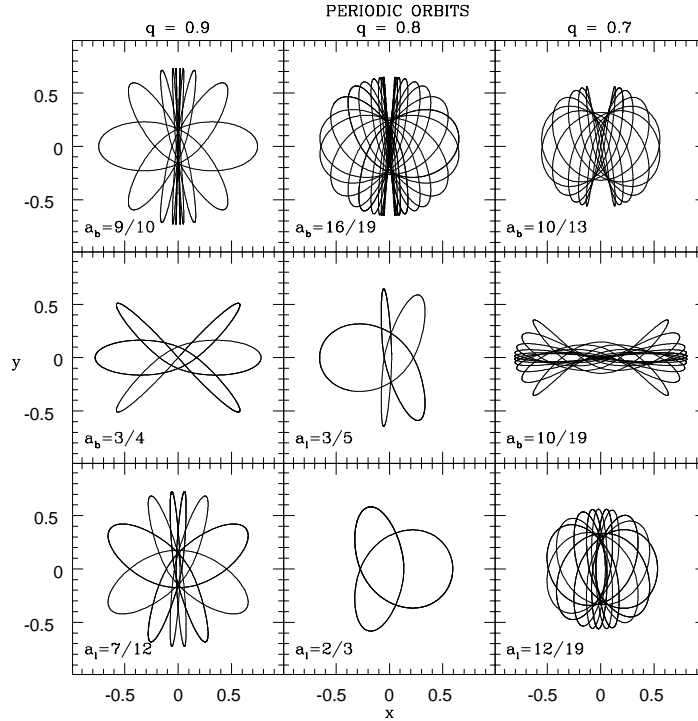


Figure 3.19 : Principales orbites périodiques. Le nombre de rotation est noté a_b pour les orbites “boîte” et a_l pour les orbites “boucle”

Les applications fréquence peuvent nous aider à déterminer les orbites périodiques principales. En effet, les îles de stabilité indiquent l'existence des orbites périodiques elliptiques correspondant aux résonances identifiées. Le centre du plateau observé sur la courbe des fréquences fournit une bonne indication de la position de l'orbite périodique correspondante, en utilisant les symétries par réflexion du hamiltonien (3.1). Une simple méthode numérique de dichotomie [158] nous permet de chercher la position exacte de l'orbite périodique avec une convergence numérique très rapide. Alors, nous avons réussi à découvrir la position des orbites elliptiques avec une précision de l'ordre de 10^{-14} . Nous présentons dans l'espace de configuration (x, y) , l'évolution des quelques orbites intéressantes du point de vue de leur topologie ou de leur difficulté d'être aperçues sur une simple surface de section (elles correspondent à des petites îles de libration) (Figure 3.19).

D'autre part le passage par des points hyperboliques indique l'existence des îles de libration associées contenant des orbites elliptiques. Dans la plupart de cas, la symétrie par réflexion des orbites nous permettra à localiser les orbites elliptiques correspondant, et en général, il donnera des information intéressant sur la taille des ces résonances, et par conséquent, sur l'intérêt de localiser l'orbite correspondante ou pas.

Chapitre 4

Le Système Logarithmique Triaxial

Après avoir étudié profondément la dynamique du système logarithmique plan, nous procédons à l'étude du système général, décrit par le hamiltonien (2.22). Tous les résultats acquis dans le cas du système plan forment une base solide pour l'étude du système triaxial. Par ailleurs, les applications fréquence complètes fourniront une représentation claire des régions régulières et des régions chaotiques ainsi que l'évolution de ces dernières par rapport aux paramètres physiques du système. Ceci permettra de cartographier les résonances dans l'espace des phases et mènera à une compréhension profonde de la dynamique globale du système. En se basant sur l'efficacité remarquable de la méthode par rapport aux approches classiques appliquées jusqu'à nos jours en dynamique galactique, nous révélerons des caractéristiques peu connues de la dynamique à 3 dimensions des modèles galactiques ainsi que leurs effets dans l'espace physique du système.

4.1 Types d'orbites

Pour l'intégration des équations du mouvement du système général, nous utilisons l'intégrateur numérique de Runge-Kutta de 7/8ème ordre, déjà employé dans le cas du système plan. Pour la valeur de l'énergie utilisée dans les sections précédentes ($h_0 = -0.40589$), nous choisissons deux valeurs des rapports axiaux qui sont proches de 1 ($q_1 = 1.1$ and $q_2 = 0.9$), afin d'étudier les effets dynamiques introduits quand le système devient non-intégrable. Comme avant, le paramètre R_c est égale à 0.1.

Malheureusement, la construction de l'application de Poincaré est difficile dans le cas d'un système à des dimensions supérieures à 3. Alors, nous pouvons essayer d'avoir une idée sur le comportement dynamique du système logarithmique triaxial en représentant l'évolution des quelques orbites typiques dans l'espace de configuration. Nous employons la terminologie de la dynamique galactique en désignant les axes des x , y et z comme moyen, grand et petit.

Avant d'étudier la morphologie orbitale du système, faisons d'abord quelques commentaires concernant les orbites périodiques principales (familles d'orbites rectilignes et circulaires). Il semble clair que ces orbites jouent un rôle fondamental sur la structure de l'espace des phases du système. Comme nous avons déjà mentionné, les orbites rectilignes existent pour toutes les valeurs des paramètres de perturbation. En examinant la Figure 2.4, nous pouvons affirmer que l'orbite x -axiale (de l'axe moyen) est linéairement elliptique suivant la direction de grand axe (y) et hyperbolique suivant la direction de petit axe (z). D'autre part, l'orbite y -axiale

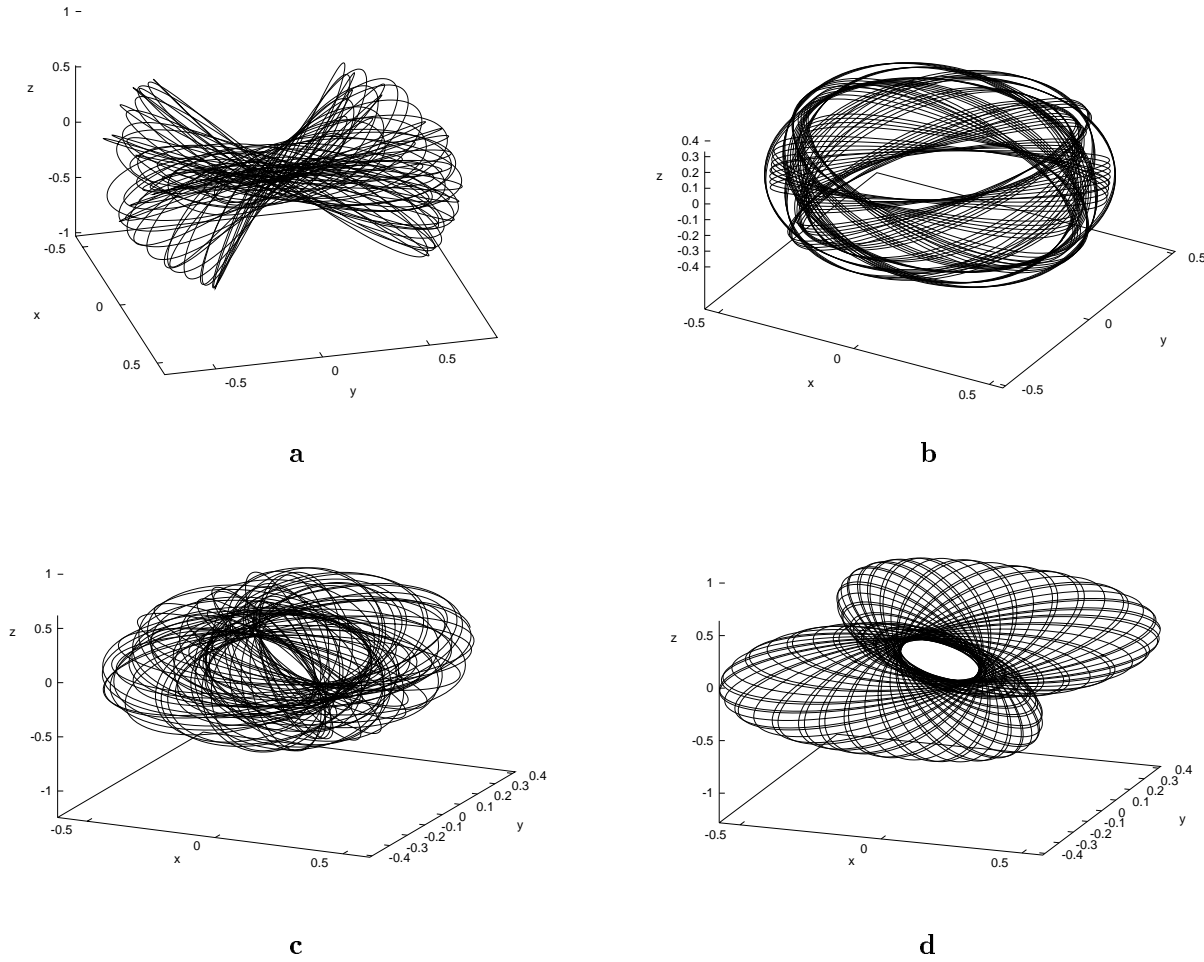


Figure 4.1 : Orbits typiques du système logarithmique sur l'espace de configuration (x, y, z) : (a) Orbit "boîte" \mathcal{B} (b) orbit "tube de petit axe" \mathcal{T}_S et (c,d) orbit "tube intérieur et extérieur de grand axe" (\mathcal{T}_O et \mathcal{T}_I , respectivement)

oscillant sur le grand axe du système est elliptique – elliptique, tandis que l'orbite z -axiale (de petit axe) est hyperbolique – hyperbolique.

Contrairement aux orbites périodiques rectilignes, il n'est pas du tout évident que les orbites périodiques associées aux systèmes axisymétriques existent pour les valeurs choisies des paramètres de perturbation. En effet, la seule manière rigoureuse pour prouver leur existence, notamment l'application du théorème des fonctions implicites [27] est impossible, comme nous ne connaissons pas explicitement leur flot pour des rapports axiaux différents de 1. Toutefois, dans ce cas, nous pouvons localiser ces orbites numériquement en utilisant une méthode de Newton-Raphson (voir par exemple [158]). L'application d'une analyse de stabilité montre que les orbites qui évoluent sur les plans principaux (x, y) et (x, z) sont elliptiques – elliptiques. Néanmoins, l'orbite restreinte sur le plan formé par le petit et le grand axe (y, z) est elliptique – hyperbolique.

Les catégories principales d'orbites du système logarithmique représentées sur la Figure 4.1

sont les orbites “boîte” et les 3 types des “tube” (voir aussi [170]). Des orbites avec la même topologie apparaissent dans d’autres modèles galactiques avec des équipotentielles ellipsoïdales, (par exemples les systèmes de Stäckel [56], [178]).

Les orbites “boîte” peuvent être considérées comme une généralisation des orbites “boîte” à 2 dimensions (Section 3.1). Elles forment avec leurs extrémités un parallélépipède, dans l’espace de configuration, et passent toujours par le centre $x = y = z = 0$ (Figure 4.1a). Elles oscillent le long des 3 dimensions de l’espace de configuration. Ces orbites peuvent être considérées comme le couplage entre les trois systèmes intégrables étudiés dans la Section 2.3.1.

Par ailleurs, les orbites “tube” sont les extensions tridimensionnelles des orbites “boucle” (Section

3.1) : elles tournent autour des axes principaux de l’espace de configuration. Cependant, on peut trouver seulement des orbites “tube” qui tournent autour du petit est du grand axe (dans ce cas les orbites qui tournent autour de l’axe des y et des z , respectivement). Ce fait est dû à l’hyperbolicité de l’orbite périodique plane qui se déplace autour de l’axe moyen (x) (voir [14] pour quelques arguments analytiques). Notons aussi que les orbites “tube de grand axe” sont séparées aux orbites “tube intérieur” et “extérieur” (Figure 4.1c et 4.1d, respectivement).

En première vue, nous pouvons considérer que les orbites “tube” sont des produits d’un système axisymétrique perturbé à 2 degrés de liberté (en posant les rapports axiaux différents de 1), et de l’addition d’une troisième dimension non-symétrique par rotation. Alors, nous pouvons soupçonner que les orbites “tube”, comme les “boucle” (Section 3.4.2), sont des orbites résonantes dans les variables rectangulaires. Néanmoins, leurs formes variées dans l’espace de configuration indiquent que les orbites “tube” présentent des différences dynamiques fondamentales entre eux (voir aussi [56], [178] pour une discussion sur les orbites “tube” des systèmes de Stäckel).

En effet, dans ce niveaux de notre étude, plusieurs questions peuvent être soulevées en ce qui concerne la dynamique de ces orbites. Il est certain que les projections sur l’espace de configuration fournissent des indications très limitées, spécialement dans le cas des systèmes multidimensionnels. Un autre aspect important, qui ne peut pas être expliqué par cette étude hâtive, est la nature de l’espace des phases complémentaire qui sépare ces orbites présumées régulières. Afin de clarifier nos idées sur ces points, nous utiliserons dans la section suivante l’aspect fondamental de l’analyse en fréquence, c.-à-d. les approximations quasi-périodiques des solutions déterminées numériquement (voir Section 3.3.2).

4.2 Analyse en fréquence du système logarithmique triaxial : approximations quasi-périodiques

4.2.1 Orbites “boîte”

Nous appliquons l’algorithme NAFF à l’orbite représentative “boîte” \mathcal{B} (Figure 4.1a), générée par les conditions initiales $(x_0, X_0, y_0, Y_0, z_0, Z_0) = (0, 1.5, 0, 1.5, 0, 1.975)$. Le temps d’intégration correspond à 20 intersections de l’orbite avec la surface $y = 0$ (avec une vitesse $Y > 0$). Pour cet intervalle de temps, la précision sur la détermination du vecteur fréquence des solutions quasi-périodiques est de l’ordre de 10^{-6} (équation (3.24)).

Nous présentons dans le Tableau 4.1 les approximations quasi-périodiques données par l’analyse en fréquence. La méthode est appliquée à chaque paire de variables conjuguées écrites sous la forme des fonctions complexes $f_y(t) = y(t) + iY(t)$, $f_x(t) = x(t) + iX(t)$ et

Tableau 4.1 : Analyse en fréquence de l'orbite “boîte” \mathcal{B} (Figure 4.1a). La solution quasi-périodique est écrite sous la forme $\tilde{f}(t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{i\omega_k t}$, où $a_k = A_k e^{i\phi_k}$, avec $A_k \geq 0$ une amplitude réelle, ϕ_k la phase et ω_k doit être une combinaison linéaire des trois fréquences fondamentales ν, ν' et ν'' , alors que $\delta\omega_k = |\omega_k - (m_k\nu + m'_k\nu' + m''_k\nu'')|$ est la mesure de la précision de la décomposition quasi-périodique

k	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	m''_k	$\delta\omega_k$
Solution pour les variables associées au grand axe (y, Y)							
1	-2.0287623	.987444	84.58	1	0	0	.0000000
2	2.0287586	.335554	95.43	-1	0	0	.0000038
3	-6.0863966	.166708	74.34	3	0	0	.0001096
4	6.0863839	.119688	105.71	-3	0	0	.0000969
5	-3.1950076	.125389	270.78	-1	2	0	.0000049
6	-.8624164	.078276	257.82	3	-2	0	.0001055
7	-10.1442807	.068078	65.48	5	0	0	.0004690
8	3.1949935	.065623	269.29	1	-2	0	.0000093
9	10.1442652	.055851	114.59	-5	0	0	.0004535
10	-4.0769310	.047749	275.90	-1	0	2	.0010426
Solution pour les variables associées à l'axe moyen (x, X)							
1	-2.6118825	.571272	87.67	0	1	0	.0000000
2	-1.4456238	.293950	81.39	2	-1	0	.0000183
3	2.6118841	.255012	92.32	0	-1	0	.0000015
4	-6.6694434	.133059	77.03	2	1	0	.0000360
5	6.6694377	.098392	103.00	-2	-1	0	.0000305
6	-3.4948700	.092270	278.92	0	-1	2	.0000166
7	-10.7270560	.057744	66.65	4	1	0	.0001241
8	1.4455827	.053613	98.82	-2	1	0	.0000595
9	3.4948809	.051189	261.01	0	1	-2	.0000274
10	10.7270448	.047904	113.40	-4	-1	0	.0001129
Solution pour les variables associées au petit axe (z, Z)							
1	-3.0533680	.578596	93.00	0	0	1	.0000000
2	3.0533665	.293065	86.77	0	0	-1	.0000014
3	-1.0041090	.208166	75.70	2	0	-1	.0000478
4	-7.1109502	.155588	82.71	2	0	1	.0000576
5	7.1109407	.117255	97.33	-2	0	-1	.0000480
6	-2.1702015	.087983	80.93	0	2	-1	.0001956
7	-11.1685522	.068138	72.26	4	0	1	.0001348
8	11.1685374	.056938	107.79	-4	0	-1	.0001200
9	-1.8870803	.040905	86.61	2	-2	1	.0000473
10	-15.2259972	.034549	60.89	6	0	1	.0000552

$f_z(t) = z(t) + iZ(t)$, respectivement (les variables représentant le grand, le moyen et le petit axe pour les paramètres de perturbation choisis). Comme dans le cas du problème plan (Section 3.4), les séries comportent typiquement 40 termes. Nous présentons seulement le 10 premiers termes de chaque série, qui fourniront, cependant, les informations nécessaires afin de clarifier la dynamique de l'orbite en question. Notons, d'abord, que les solutions représentées sur le Tableau 4.1 sont quasi-périodiques : tous les ω_k peuvent être identifiées par des combinaisons linéaires des trois fréquences fondamentales $\nu_B = -2.0287623$, $\nu'_B = -2.6118825$ and $\nu''_B = -3.0533680$, correspondant aux trois termes d'amplitude maximale de chaque approximation quasi-périodique.

Nous pouvons aussi remarquer que les trois fréquences correspondant aux termes d'amplitude maximale ne sont pas résonantes. En effet, les “boîte”, comme leurs restrictions bidimensionnelles (Section 3.4.1), sont des orbites de circulation dans l'espace des phases paramétré par les variables cartésiennes. Elles peuvent être générées par le couplage des systèmes intégrables à 1 degré de liberté, étudiés en détails dans la Section 2.3.1. Plus précisément, notons que la seule orbite périodique axiale qui est linéairement elliptique pour des valeurs des paramètres de perturbation proches du cas sphérique, est l'orbite de grand axe, c.-à-d. celle qui est générée par le système (y, Y) , dans notre cas (voir Figure 2.4). En effet, la fonction $f_y(t)$ (Tableau 4.1) est la seule approximation où on peut distinguer des harmoniques de la forme $\omega_k = m\nu_B$ (voir aussi Section 3.4.1). Alors, la perturbation du “système de grand axe” en ajoutant 2 dimensions non symétriques par rotation dans l'argument du logarithme de l'équation (2.28) génère des orbites “boîte”. Donc, pour $q_1 > q_2$, $q_1 > 1$,¹ nous pouvons écrire le hamiltonien du système complet :

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H' \quad \text{avec} \\ H_0 &= \frac{1}{2}Y^2 + \ln \left(\frac{y^2}{q_1^2} + R_c^2 \right) \\ H' &= \frac{1}{2}X^2 + Z^2 + \ln \left(1 + \frac{x^2 + z^2/q_2^2}{y^2/q_1^2 + R_c^2} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

La seconde partie du hamiltonien (4.1) peut être considérée comme une perturbation, si x et z sont assez petits par rapport à y . Néanmoins, une approche perturbative serait impossible (Section 3.5) car les variables utilisées sont assez loin des variables d'action du système intégrable. La complexité et la convergence lente des séries quasi-périodiques est une indication directe de ce dernier fait.

4.2.2 Orbites “tube”

“Tube de petit axe”

Nous générons une orbite “tube de petit axe” typique \mathcal{T}_S , dont la projection sur l'espace de configuration est représentée sur la Figure 4.1b. Nous intégrons les équations du mouvement du système en utilisant les conditions initiales $(x_0, X_0, y_0, Y_0, z_0, Z_0) = (0.362, 0, 0, 0.929, 0.486, 0)$, pour le même intervalle de temps, comme pour l'orbite “boîte”. Les approximations quasi-périodiques extraites par l'algorithme NAFF pour les trois fonctions complexes $f_y(t)$, $f_x(t)$ et $f_z(t)$ sont représentées sur le Tableau 4.2.

¹Dans ce cas y est le grand axe mais nous pouvons avoir des expressions similaires pour tous les intervalles des paramètres q_1 et q_2 .

Tableau 4.2 : Analyse en fréquence de l'orbite "tube de petit axe" \mathcal{T}_S

k	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	m''_k	$\delta\omega_k$
Solution pour les variables associées au grand axe (y, Y)							
1	-2.6918992	.750779	84.78	1	0	0	.0000000
2	2.6918988	.344067	95.23	-1	0	0	.0000004
3	-1.3171074	.120528	267.53	0	1	0	.0000215
4	-3.2918635	.101192	83.93	-1	0	2	.0000202
5	-6.7009085	.048695	257.04	2	1	0	.0000240
6	3.2918610	.054028	96.09	1	0	-2	.0000177
7	6.7009067	.036049	282.97	-2	-1	0	.0000223
8	-2.0918926	.026069	264.64	3	0	-2	.0000625
9	-8.0756836	.021531	254.15	3	0	0	.0000141
10	-8.6756293	.018564	253.34	1	0	2	.0000125
Solution pour les variables associées à l'axe moyen (x, X)							
1	-2.6918970	.759688	354.76	1	0	0	.0000022
2	2.6918971	.348239	185.24	-1	0	0	.0000021
3	-3.2918330	.147746	173.39	-1	0	2	.0000103
4	-1.3170860	.091676	357.30	0	1	0	.0000000
5	3.2918324	.078852	6.57	1	0	-2	.0000108
6	-6.7008969	.050402	166.99	2	1	0	.0000124
7	-2.0918971	.040281	175.08	3	0	-2	.0000581
8	6.7008897	.037356	13.03	-2	-1	0	.0000052
9	-8.0756878	.021919	164.30	3	0	0	.0000099
10	8.0756932	.017117	15.59	-3	0	0	.0000045
Solution pour les variables associées au petit axe (z, Z)							
1	-2.9918713	.738667	354.19	0	0	1	.0000000
2	2.9918716	.368675	185.82	0	0	-1	.0000003
3	-2.3919391	.134959	355.63	2	0	-1	.0000119
4	-1.0170874	.062718	357.95	1	1	-1	.0000266
5	2.3919462	.055466	184.24	-2	0	1	.0000190
6	-7.0008724	.053681	166.41	1	1	1	.0000159
7	7.0008645	.040309	13.65	-1	-1	-1	.0000081
8	-8.3756641	.026360	163.68	2	0	1	.0000056
9	8.3756730	.020781	16.26	-2	0	-1	.0000033
10	-3.5917055	.017720	171.11	-2	0	3	.0001098

Dans la Section 4.1 nous avons déduit que l'orbite “tube de petit axe” doit être résonante dans les variables employées. Ceci est en effet vrai, comme nous pouvons observer par les fréquences d'amplitude maximale des approximations quasi-périodiques correspondant aux variables (y, Y) et (x, X) . En considérant $\nu_{T_S} = -2.6918992$, $\nu'_{T_S} = -1.3170860$ et $\nu''_{T_S} = -2.9918713$ comme fréquences fondamentales, nous avons réussi à déterminer avec une bonne précision tous les harmoniques des approximations quasi-périodiques. D'autre part, les solutions correspondant aux variables résonantes et les solutions des orbites “boucle” du système plan (Section 3.4) sont très semblables. Alors, nous pouvons supposer que les orbites “tube de petit axe” sont générées par la perturbation du système axisymétrique restreint sur la surface formée par les variables du moyen et de grand axe $(x, X, y$ et Y dans notre cas), en posant le paramètre de perturbation (q_1 dans ce cas) différent de 1 et en ajoutant dans l'argument du logarithme du potentiel une troisième dimension non-axisymétrique. L'orbite périodique sur le plan formé par le moyen et le grand axe $((x, y)$ dans notre cas) étant linéairement elliptique, cette perturbation produira des orbites quasi-périodiques. Alors, pour les valeurs utilisées des rapports axiaux, nous écrivons :

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H' \quad \text{avec} \\ H_1 &= \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r_{xy}^2} \right) + \ln \left(r_{xy}^2 + R_c^2 \right) \\ H' &= \frac{1}{2} Z^2 + \ln \left(1 + \frac{r_{xy}^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{q_1^2} - 1 \right) + \frac{z^2}{q_2^2}}{r_{xy}^2 + R_c^2} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $r_{xy}^2 = x^2 + y^2$. La partie H' du hamiltonien est en effet une perturbation, si q_1 est proche de 1 et z et suffisamment petit par rapport à r_{xy} .

La région de l'espace des phases remplie par ces orbites résonantes peut être considérée comme l'extension d'une île de libration (ou d'une variété centrale de dimension 4, en utilisant la terminologie des systèmes dynamiques). Dans la zone de libration de l'espace des phases les variables cartésiennes sont résonantes, car elles sont associées aux mouvements de circulation du système (les orbites “boîte”). Par conséquent, pour l'exploration de la zone de libration correspondant aux orbites “tube” nous devons trouver un système des variables approprié qui élimine la résonance. L'approche la plus classique est la construction des formes normales qui transformeront les mouvements en produits des cercles déformés. Néanmoins, comme nous avons observé dans la Section 3.5, la transformation dans des variables action-angle adaptées est assez laborieuse dans le cas du système logarithmique. Une autre possibilité est la transformation des variables résonantes associées au grand axe et à l'axe moyen dans des coordonnées polaires, (voir équation (4.2) et aussi Section 3.2.2), qui est un ensemble des variables plus adapté pour l'étude d'orbites de ce type. Ici, nous allons suivre une approche différente qui est inspirée par la méthode de “moyennisation” des systèmes dynamiques. En effet, nous pouvons intégrer les équations du mouvement en utilisant comme pas d'intégration la période résonante $T_{T_S} = 2\pi/\nu_{T_S} = -2.3341087$ déterminée par l'analyse en fréquence. Donc, nous “moyennisons” dans un certain sens le système, comme il est effectué par exemple dans la dynamique planétaire, afin d'éliminer les mouvements rapides de l'orbite et découvrir les fréquences “réelles”, qui sont cachées par la résonance. Nous présentons les approximations

fournies par l'analyse en fréquence pour les itérés de la solution de l'orbite “tube de petit axe” \mathcal{T}_S , dans le Tableaux 4.3. Dans ce cas, le temps d'intégration correspond à 500 périodes de l'orbite \mathcal{T}_S .

L'effet le plus impressionnant de cette procédure est la diminution radicale du nombre de termes des approximations quasi-périodiques. En effet, les fréquences sont définies toujours dans un intervalle $[-2\pi/\delta t, 2\pi/\delta t)$, où δt est le pas d'intégration. Dans notre cas, le pas choisi est $\delta t = T_{\mathcal{T}_S}$, et alors les fréquences sont calculées comme $\text{mod}(\nu_{\mathcal{T}_S})$. Tous les termes, donc, qui sont une combinaison linéaire de la fréquence ($\nu_{\mathcal{T}_S}$) sont éliminés et leurs amplitudes ont été ajoutées aux premiers termes. En utilisant les mêmes fréquences $\nu_{\mathcal{T}_S}$, $\nu'_{\mathcal{T}_S}$ et $\widetilde{\nu''_{\mathcal{T}_S}} = -0.3002280$, qui est exactement $\nu''_{\mathcal{T}_S}$, $\text{mod}(\nu_{\mathcal{T}_S})$, nous pouvons décomposer tous les harmoniques de la nouvelle approximation avec une assez bonne précision, ainsi justifiant notre choix précédent sur les fréquences fondamentales.

Tableau 4.3 : Analyse en fréquence de la solution moyennisée de l'orbite “tube” de petit axe \mathcal{T}_S

k	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	m''_k	$\delta\omega_k$
Solution pour les variables associées au grand axe (y, Y)							
1	-.0003878	.615465	134.58	0	0	0	.000388
2	.0005322	.190469	353.30	0	0	0	.000532
3	-.6002694	.117937	12.02	0	0	2	.000187
4	-1.3170938	.095044	49.08	0	1	0	.000287
5	.6001756	.078694	200.63	0	0	-2	.000280
Solution pour les variables associées à l'axe moyen (x, X)							
1	-.0001122	.985153	309.34	0	0	0	.0001122
2	-.6001890	.151302	73.95	0	0	2	.0002670
3	-1.3173807	.126921	239.04	0	1	0	.0000000
4	.0006970	.118417	30.41	0	0	0	.0006970
5	.6000661	.104111	148.90	0	0	-2	.0003899
Solution pour les variables associées au petit axe (z, Z)							
1	-.3002280	.785972	308.54	0	0	1	.0000000
2	.3001484	.466051	259.19	0	0	-1	.0000796
3	-1.0172461	.066054	233.15	0	1	-1	.0000935
4	1.0742381	.065176	295.00	-1	1	1	.0000502
5	-1.0741784	.045499	224.23	1	-1	-1	.0001100

“Tube extérieur de grand axe”

La troisième famille d'orbites principales du potentiel logarithmique sont les orbites “tube extérieur de grand axe”. Pour les valeurs des rapports axiaux choisis, ces orbites tournent autour de l'axe des y dans l'espace de configuration. Alors, nous appliquons l'algorithme NAFF à une orbite représentative de cette famille \mathcal{T}_O (Figure 4.1c), en intégrant les équations du mouvement

avec pour conditions initiales $(x_0, X_0, y_0, Y_0, z_0, Z_0) = (0.430, 0, 0.416, 0, 0, 0.807)$ et 20 périodes orbitales. Les approximations quasi-périodiques pour les trois paires des variables conjuguées sont représentées dans le Tableau 4.4.

L'hypothèse que ces orbites présentent une résonance 1:1 entre les variables associée à l'axe moyen et au petit axe est vérifiée par les séries du Tableau 4.4. Tous les harmoniques peuvent être identifiés comme des combinaisons linéaires des trois fréquences fondamentales $\nu_{T_O} = -2.9479608$, $\nu'_{T_O} = -2.5947176$ et $\nu''_{T_O} = -1.2637688$ et cette orbite particulière semble quasi-périodique.

La ressemblance entre les approximations quasi-périodiques de cette orbite par rapport aux approximations correspondant à l'orbite “tube de petit axe” (voir Tableau 4.2) est assez frappante, spécialement dans la décomposition linéaire des harmoniques. Plus précisément, les variables résonantes présentent approximativement les mêmes fréquences dans leurs approximations quasi-périodiques. En effet, les orbites “tube extérieur de grand axe” peuvent être considérées comme une perturbation d'un système central (voir Section 2.3.3) en posant le rapport axial différent de 1, et encore une perturbation en ajoutant une troisième dimension non-symétrique par rotation avec les deux autres, comme dans le cas des orbites “tube de petit axe” (équation (4.2)). En tenant compte que l'orbite périodique restreinte sur le plan formé par le petit et l'axe moyen (x, z) est linéairement elliptique, le hamiltonien du système peut être écrit :

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H' \quad \text{avec} \\ H_1 &= \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Phi^2}{r_{xz}^2} \right) + \ln \left(r_{xz}^2 + R_c^2 \right) \\ H' &= \frac{1}{2} Z^2 + \ln \left(1 + \frac{r_{xz}^2 \sin^2 \phi \left(\frac{1}{q_2^2} - 1 \right) + \frac{y^2}{q_1^2}}{r_{xz}^2 + R_c^2} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

où $r_{xz}^2 = x^2 + z^2$. La seconde partie H' du hamiltonien est une perturbation, quand q_2 est proche de 1 et y est suffisamment petit par rapport à r_{xz} . Le même genre d'approche perturbative peut être utilisée pour toutes les valeurs des rapports axiaux q_1 et q_2 , en alternant les variables et les paramètres correspondants.

Formellement, le hamiltonien du système (2.22) peut être aussi exprimé comme une perturbation du système central restreint sur la surface formée par les variables associées au grand et au petit axe (y, z) et une perturbation suivant la direction de l'axe moyen (x) , comme dans le cas des orbites “tube de petit axe” et “tube extérieur de grand axe”. Toutefois, ce genre d'approche perturbative n'est pas applicable. En effet, l'orbite périodique sur le plan formé par le petit et le grand axe est partiellement hyperbolique. Alors, une perturbation de la variété correspondante génère des orbites irrégulières.

Les approximations fournies pour les solutions de l'orbite “tube extérieur de grand axe”, en utilisant comme pas d'intégration la période T_{T_O} , sont présentées dans le Tableau 4.5. Les remarques soulevées dans la section précédente pour l'orbite “tube de petit axe” sont aussi valables dans ce cas. En effet, toutes les fréquences qui sont égales aux multiples de la fréquence résonante ν_{T_O} sont éliminées (elles sont remplacées par des fréquences nulles). Tous les harmoniques peuvent être identifiés par les termes correspondant aux solutions originales (Tableau 4.4), en tenant en compte que les fréquences sont maintenant calculées comme modulo

Tableau 4.4 : Analyse en fréquence de l'orbite "tube extérieur de grand axe" \mathcal{T}_O

k	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	m''_k	$\delta\omega_k$
Solution pour les variables associées au grand axe (y, Y)							
1	-2.5947176	.430210	355.24	0	1	0	.0000000
2	2.5947142	.190888	184.78	0	-1	0	.0000034
3	-1.6170243	.163746	357.16	1	-1	1	.0000123
4	-3.3012566	.085303	354.13	2	-1	0	.0000525
5	-6.8064253	.045694	167.46	1	1	1	.0000219
6	3.3012511	.045611	185.89	-2	1	0	.0000470
7	1.6170541	.038651	182.68	-1	1	-1	.0000420
8	-6.8064253	.045694	167.46	1	1	1	.0000219
9	-.9104960	.022023	358.23	-1	1	1	.0000296
10	-8.4906514	.013050	344.44	2	1	0	.0000122
Solution pour les variables associées à l'axe moyen (x, X)							
1	-2.9479608	.740682	354.51	1	0	0	.0000000
2	2.9479629	.365472	185.43	-1	0	0	.0000021
3	-1.2637285	.180916	357.55	0	0	1	.0000403
4	-2.2413770	.110407	175.42	-1	2	0	.0000974
5	-7.1596638	.092454	166.74	2	0	1	.0000267
6	7.1596695	.069793	13.22	-2	0	-1	.0000210
7	2.2413893	.042306	4.50	1	-2	0	.0000850
8	-8.8439467	.023795	344.05	3	0	0	.0000643
9	-1.9698594	.028267	174.13	2	-2	1	.0003958
10	1.2636631	.021105	182.85	0	0	-1	.0001058
Solution pour les variables associées au petit axe (z, Z)							
1	-2.9479615	.935713	84.52	1	0	0	.0000007
2	2.9479602	.461826	95.45	-1	0	0	.0000007
3	-1.2637688	.169304	267.78	0	0	1	.0000000
4	-7.1596693	.115555	256.77	2	0	1	.0000211
5	7.1596685	.087298	283.24	-2	0	-1	.0000219
6	-2.2416241	.079456	86.67	-1	2	0	.0001497
7	2.2417453	.030410	92.71	1	-2	0	.0002709
8	-8.8439283	.029644	73.92	3	0	0	.0000458
9	8.8438970	.023664	106.28	-3	0	0	.0000145
10	-11.3713619	.024318	68.88	3	0	2	.0000581

Tableau 4.5 : Analyse en fréquence de la solution moyennisée de l'orbite “tube extérieur de grand axe” \mathcal{T}_O

k	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	m''_k	$\delta\omega_k$
Solution pour les variables associées au grand axe (y, Y)							
1	-.3531154	.447724	22.55	0	1	0	.0000000
2	.3531870	.238699	189.61	0	-1	0	.0000716
3	-1.3308548	.171481	160.50	-1	-1	1	.0000685
4	.9107998	.056915	351.80	0	1	1	.0000069
5	1.3308579	.046370	21.20	1	1	-1	.0000653
6	-.9108989	.030425	143.58	0	-1	-1	.0000922
Solution pour les variables associées à l'axe moyen (x, X)							
1	-.0000790	.955231	304.08	0	0	0	.0000790
2	-1.2639221	.237295	243.75	0	0	1	.0000000
3	.7063596	.121189	259.76	0	2	0	.0001288
Solution pour les variables associées au petit axe (z, Z)							
1	-.0002382	.734732	115.66	0	0	0	.0002382
2	.0004467	.228229	8.36	0	0	0	.0004467
3	-1.2637615	.129431	64.87	0	1	0	.0001607
4	.7064152	.075837	142.12	0	0	-2	.0001844
5	1.264203	.070470	79.19	0	-1	0	.0002810

la fréquence résonante $\nu_{\mathcal{T}_O}$. Les fréquences fondamentales choisies pour décomposer les approximations quasi-périodiques sont les deux fréquences $\nu_{\mathcal{T}_O}$ et $\nu''_{\mathcal{T}_O}$ de la solution “originale” et une troisième $\tilde{\nu}'_{\mathcal{T}_O} = -0.3531154$, qui est égale à $\nu'_{\mathcal{T}_O} \bmod(\nu_{\mathcal{T}_O})$.

“Tube intérieur de grand axe”

La dernière famille principale d'orbites quasi-périodiques du système logarithmique sont les orbites “tube intérieurs de grand axe”. Le comportement de ces orbites dans l'espace de configuration du système est assez similaire avec les orbites “tube extérieures de grand axe”. Afin d'étudier plus en détail leur dynamique, nous présentons les approximations quasi-périodiques données par l'analyse en fréquence (Tableau 4.6) appliquée à l'orbite de la Figure 4.1d. En effet, nous intégrons les équations du mouvement du système avec pour conditions initiales $(x_0, X_0, y_0, Y_0, z_0, Z_0) = (0.502, 0, 0.416, 0, 0, 0.998)$, qui diffèrent de très peu des conditions correspondant à l'orbite “tube extérieur de grand axe”, étudiée dans la section précédente.

Nous pouvons remarquer qu'il existe toujours une résonance 1:1 entre les fréquences de plus grande amplitude des approximations quasi-périodiques des fonctions $f_x(t)$ et $f_z(t)$, comme pour les orbites “tube extérieur de grand axe”. La différence, cependant, est apparente aux approximations quasi-périodiques de la fonction $f_y(t)$ (première partie du Tableau 4.6). D'abord, pour un petit changement des conditions initiales par rapport à celles qui ont généré l'orbite “tube extérieur de grand axe” (voir Sect. 4.2.2), la fréquence a changé dramatiquement de

Tableau 4.6 : Analyse en fréquence de l'orbite "tube intérieur de grand axe" \mathcal{T}_I

k	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	m''_k	$\delta\omega_k$
Solution pour les variables associées au grand axe (y, Y)							
1	-2.1157969	.579921	356.48	0	1	0	.0000000
2	2.1157998	.207799	183.51	0	-1	0	.0000029
3	-6.3473826	.080453	169.39	0	3	0	.0000081
4	6.3473937	.058588	10.55	0	-3	0	.0000031
5	-3.7548823	.061794	353.75	2	-1	0	.0000198
6	3.7548673	.035810	186.25	-2	1	0	.0000048
7	-10.5789513	.026199	342.18	0	5	0	.0000331
8	-.4767689	.026393	359.13	-2	3	0	.0000377
9	10.5789760	.021681	197.69	0	-5	0	.0000084
10	-14.8105005	.010503	154.89	0	7	0	.0000777
Solution pour les variables associées à l'axe moyen (x, X)							
1	-2.9353297	.676528	355.10	1	0	0	.0000000
2	2.9353274	.332789	184.90	-1	0	0	.0000023
3	-1.2962729	.285460	357.86	0	0	1	.0000172
4	-7.1669122	.136910	168.00	2	0	1	.0000029
5	7.1669130	.103418	11.99	-2	0	-1	.0000021
6	-11.3984817	.047701	340.81	3	0	2	.0000188
7	11.3984918	.040026	199.13	-3	0	-2	.0000087
8	1.2963395	.036977	181.90	0	0	-1	.0000839
9	-8.8059011	.020605	345.17	3	0	0	.0000880
10	-15.6300372	.019471	153.60	4	0	3	.0000487
Solution pour les variables associées au petit axe (z, Z)							
1	-2.9353304	.881460	85.11	1	0	0	.0000007
2	2.9353321	.433603	94.89	-1	0	0	.0000024
3	-1.2962557	.275569	267.87	0	0	1	.0000000
4	-7.1669111	.175022	258.00	2	0	1	.0000040
5	7.1669168	.132209	281.98	-2	0	-1	.0000016
6	-11.3984720	.060197	70.78	3	0	2	.0000285
7	11.3984820	.050492	109.16	-3	0	-2	.0000185
8	1.2962768	.035683	271.80	0	0	-1	.0000211
9	-8.8058941	.026333	75.12	3	0	0	.0000951
10	-13.0374912	.022266	248.04	4	0	1	.0000834

-2.5947176 à -2.1157969 . De plus, nous pouvons remarquer l'apparition des plusieurs harmoniques non-couplés, comme dans le cas de la solution correspondant à l'orbite "boîte" (voir Tableau 4.1). En effet, le système circule dans les variables correspondant au grand axe. Par conséquent, il semble raisonnable de considérer que les orbites "tube extérieur de grand axe" sont générées par une perturbation du système intégrable à 1 degré de liberté associé à des orbites rectilignes qui oscillent sur le grand axe du système (comme pour les orbites "boîte"). Néanmoins, contrairement au cas des orbites "boîte", cette perturbation est associée à un système central perturbé. Alors nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 H &= H_1 + H' \quad \text{avec} \\
 H_0 &= \frac{1}{2}Y^2 + \ln(y^2/q_1^2 + R_c^2) \\
 H' &= \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Phi^2}{r_{xz}^2} \right) + \ln \left(1 + \frac{r_{xz}^2 \sin^2 \phi \left(\frac{1}{q_2^2} - 1 \right)}{\frac{y^2}{q_1^2} + R_c^2} \right) .
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

H' est une perturbation si q_2 est proche de 1 et r_{xz} est suffisamment petit par rapport à y . Cette approche perturbative montre aussi pourquoi le système ne génère pas des orbites "tube intérieur de petit axe" : les diagrammes de stabilité (voir Figure 2.4) des trois orbites périodiques rectilignes montrent clairement que pour toutes les valeurs de q_1 et q_2 qui sont suffisamment proche de 1, l'orbite périodique rectiligne qui se déplace sur le petit axe du système, est toujours hyperbolique.

Finalement, nous avons essayé d'éliminer la résonance 1:1, comme dans les cas des autres orbites "tube", en intégrant les équations du mouvement pour le même orbite "tube intérieur de grand axe" et en utilisant comme pas d'intégration la période résonante $T_{T_1} = -2.14053818$. Ensuite, nous avons calculé les approximations quasi-périodiques fournies par l'analyse en fréquence. Comme dans les cas précédents, cette procédure à diminuer considérablement la taille des séries. Toutes les fréquences qui restent peuvent être identifiées comme la combinaison linéaire des trois fréquences fondamentales : la fréquence résonante ν_{T_1} , et aussi $\tilde{\nu}'_{T_1} = -0.8194141$ et $\tilde{\nu}''_{T_1} = -1.2963183$ qui sont exactement les fréquences déterminées précédemment, modulo la fréquence (ν_{T_1}).

4.3 Les applications fréquence du problème triaxial

La connaissance acquise par les approximations quasi-périodiques des types d'orbites principales sera exploitée pour la construction des applications fréquence, à travers lesquelles nous étudierons la dynamique globale du système logarithmique triaxiale.

4.3.1 Choix des paramètres

Comme nous avons déjà mentionné, nous avons choisi de garder l'énergie constante à une valeur arbitraire ($h = -0.40589$) et le rayon du noyau central est fixé à $R_c = 0.1$ (environ 1/8ème de la valeur maximum de la variable x , voir équation (2.25)). D'autre part, nous utiliserons plusieurs valeurs représentatives des paramètres q_1 et q_2 . Ainsi, nous pouvons étudier le comportement

Tableau 4.7 : Analyse en fréquence de la solution moyennisée de l'orbite “tube intérieur de grand axe” \mathcal{T}_I

k	ω_k	A_k	ϕ_k	m_k	m'_k	m''_k	$\delta\omega_k$
Solution pour les variables associées au grand axe (y, Y)							
1	-.8194141	.587290	97.23	0	1	0	.0000000
2	.8194511	.225585	103.81	0	-1	0	.0000370
3	-.4770591	.087104	94.45	1	-3	0	.0000282
4	.4771027	.055465	51.25	-1	3	0	.0000153
5	1.1617362	.024620	131.47	1	5	0	.0000048
Solution pour les variables associées à l'axe moyen (x, X)							
1	-.0000895	.794412	313.50	0	0	0	.0000895
2	-1.2964310	.334600	249.12	0	0	1	.0001127
3	1.2966325	.111234	194.78	0	0	-1	.0003142
Solution pour les variables associées au petit axe (z, Z)							
1	-.0001697	.843905	111.39	0	0	0	.0001697
2	-1.2963183	.275358	76.99	0	0	1	.0000000
3	-.0005125	.266220	345.34	0	0	0	.0005125
4	1.2966480	.120706	70.31	0	0	-1	.0003297
5	-.3421874	.057639	104.30	0	-2	1	.0003226

dynamique possible du système logarithmique et son évolution à travers le changement de la forme des équipotentielles.

Les paramètres choisis doivent correspondre à des valeurs physiques de la fonction de densité (voir équation (2.21)). De plus, ils doivent approximer les ellipticités des configurations observées des galaxies elliptiques. En effet, comme nous avons mentionné dans la Section 2.2.1, les surfaces de densité égale du potentiel logarithmique sont deux à trois fois plus plates que les équipotentielles. Alors, nous avons calculé les meilleures estimations possibles pour les rapports axiaux des surfaces de densité à travers les équations (2.16) (Section 2.2.1). Sur le Tableau 4.8, nous présentons les 12 couples de paramètres choisis (q_1, q_2) , ainsi que les rapports des équipotentielles (q'_1, q'_2) et les paramètres correspondant aux surfaces de densité égale. Ce choix nous permet d'étudier le comportement dynamique du système pour plusieurs configurations de densité : le rapport entre le petit et le grand axe des surfaces de densité égale varient entre 1/6 et 1/2, pour un paramètre de triaxialité qui prend des valeurs de 0.94 (très proche d'un modèle allongé) jusqu'à 0.25 (des modèles assez aplatis).²

4.3.2 Construction des applications fréquence

L'espace des phases d'un système hamiltonien à 2 degrés de liberté peut être visualisé à travers une application de Poincaré [156] (voir Section 3.1). Néanmoins, ces applications sont très

²En effet, à cause de l'aplatissement des surfaces de niveaux de densité, même le modèle proche du cas central ($q_1 = 1.1$ et $q_2 = 0.9$) sont assez plats.

Tableau 4.8 : Paramètres de perturbation (q_1 et q_2), rapports axiaux des équipotentiels (q'_1 et q'_2) et paramètres de forme (b/a , c/a et T_p)

q_1	q_2	q'_1	q'_2	b/a	c/a	T_p
1.15	1.25	0.92	0.81	0.83	0.51	0.43
1.10	0.90	0.91	0.82	0.75	0.52	0.60
1.15	0.90	0.87	0.78	0.69	0.48	0.67
1.25	0.90	0.80	0.72	0.61	0.40	0.76
1.35	0.90	0.74	0.67	0.54	0.35	0.81
1.50	0.90	0.67	0.60	0.47	0.30	0.86
1.80	0.90	0.56	0.50	0.38	0.23	0.91
2.25	0.90	0.44	0.40	0.30	0.18	0.94
1.35	1.25	0.93	0.74	0.89	0.39	0.25
0.95	0.75	0.95	0.75	0.81	0.35	0.40
0.90	0.70	0.90	0.70	0.72	0.28	0.52
1.20	0.75	0.83	0.63	0.69	0.22	0.54

difficilement exploitables pour des systèmes à 3 degrés de liberté et plus : dans ces cas, elles correspondent à des surfaces de dimension supérieure ou égale à 4. A notre connaissance, le seul moyen satisfaisant pour la représentation de la dynamique des systèmes à 3 degrés de liberté ou plus est l'application fréquence. En effet, dans le cas d'un système à 3 degrés de liberté, l'application fréquence est une représentation directe du réseau compliqué formés par les résonances du système, ce qu'on appelle le “réseau d'Arnol'd” (“Arnol'd web”, voir [5] et aussi [6], p. 93).

Afin de construire une application fréquence, nous réalisons une réduction drastique de la dimension du système, en fixant toutes les variables du type “angles” dans des valeurs arbitraires. Pour un système à 3 degrés de liberté, il est nécessaire de fixer trois variables à des valeurs constantes et de prendre des conditions initiales dans le deux autres, la dernière variable étant déterminée par la restriction du système sur la variété d'énergie considérée. En effet, comme nous avons mentionné dans le cas du système logarithmique plan (Section 3.7), il faut que la section choisie coupe transversalement les tores considérés, en tenant en compte les symétries du système (pour plus de détails voir aussi [108], [110]).

Orbites “boîte”

L'espace des phases du système logarithmique triaxial peut être divisé en quatre régions correspondant aux différents types d'orbites du système. D'abord, les “boîte” peuvent être générées par le couplage des trois systèmes à 1 degré de liberté (équation (2.28)). L'espace des phases de ces systèmes intégrables est paramétré par la valeur constante de l'énergie. Si maintenant nous posons toutes les variables spatiales égales à 0, les conditions initiales des moments conjugués X_0 , Y_0 et Z_0 sont directement associées avec les valeurs de l'énergie de chaque système intégrable. Alors, dans le cas du système général, nous pouvons générer des orbites “boîte” en choisissant des conditions initiales sur les plans formés par les deux moments, (le plan (X, Y) par exemple) et calculer la troisième variable (Z) par l'équation (2.22). A cause des symétries

Tableau 4.9 : Orbites “boîte” périodiques représentées sur les applications fréquence des Figures 4.2, 4.4 et 4.6, avec les valeurs de nombres de rotation a_1 , a_2 , les lignes résonantes (α, β, γ) qui les définies par leurs intersections et les labels des Figures correspondantes

Orb. pér.	a_1	a_2	Lignes résonantes	labels
2:3:4	0.5	0.75	$(1,-2,1) \cap (2,0,-1)$	4.6d 4.2a,c,d
3:4:5	0.6	0.8	$(1,-2,1) \cap (2,1,-2)$	4.4a,b 4.6a,c,d
2:5:6	0.333	0.833	$(3,0,-1) \cap (1,2,-2)$	4.4d
4:5:6	0.667	0.833	$(1,-2,1) \cap (3,0,-2)$	4.2a,b,c, 4.6a,b,c
4:5:7	0.571	0.714	$(1,2,-2) \cap (3,-1,-1)$	4.6a,b,c
4:6:7	0.571	0.857	$(2,1,-2) \cap (1,-3,2)$ $(2,1,-2) \cap (3,-2,0)$	4.2c,d 4.6a,b
5:6:7	0.714	0.857	$(1,-2,1) \cap (3,1,-3)$ $(1,-2,1) \cap (5,-3,-1)$	4.2b 4.6c
3:7:8	0.375	0.875	$(2,-2,1) \cap (3,1,-2)$	4.4c
5:6:8	0.625	0.75	$(2,1,-2) \cap (2,-3,1)$	4.2a, 4.6a,b,c
5:7:8	0.625	0.875	$(3,-1,-1) \cap (1,-3,2)$	4.2b,c,d, 4.4a, 4.6c
5:7:9	0.556	0.778	$(1,-2,1) \cap (4,1,-3)$	4.6c
5:8:9	0.556	0.889	$(2,1,-2) \cap (1,-4,3)$	4.2d
6:7:9	0.667	0.778	$(3,0,-2) \cap (2,-3,1)$	4.2a,b,c, 4.6a,b,c
6:8:9	0.667	0.889	$(3,0,-2) \cap (1,-3,2)$	4.2a,b,c, 4.6a,(c)
6:7:10	0.6	0.7	$(4,-2,-1) \cap (3,-4,-1)$	(4.6b)
4:9:10	0.4	0.9	$(2,-2,1) \cap (5,0,-2)$	(4.4c)
6:9:10	0.6	0.9	$(3,0,-2) \cap (2,2,-3)$	4.2d
6:8:11	0.545	0.727	$(5,-1,-2) \cap (1,2,-2)$	(4.6c)
4:10:11	0.364	0.909	$(3,1,-2) \cap (5,-2,0)$	4.4c
7:9:10	0.7	0.9	$(1,-3,2) \cap (4,-2,-1)$	4.2a,b
7:8:11	0.636	0.727	$(2,1,-2) \cap (5,-3,-1)$	4.6b
7:9:11	0.636	0.818	$(1,-2,1) \cap (5,-1,-2)$	4.6(a),c
7:10:11	0.636	0.909	$(3,-1,-1) \cap (1,-4,3)$	4.2c
4:11:13	0.308	0.846	$(1,2,-2) \cap (6,-1,-1)$	4.4d
7:9:13	0.538	0.692	$(2,-3,1) \cap (5,-1,-2)$	4.6(a),c
8:9:12	0.667	0.75	$(3,0,-2) \cap (3,-4,1)$	4.6b
7:11:12	0.583	0.917	$(2,2,-3) \cap (5,-1,-2)$	4.2d
8:11:12	0.667	0.917	$(3,0,-2) \cap (1,-4,3)$	4.2b,c
7:11:13	0.538	0.846	$(1,-3,2) \cap (4,1,-3)$	4.2d, (4.4a)
8:12:13	0.615	0.923	$(3,-2,0) \cap (2,3,-4)$	(4.2d)
7:11:15	0.466	0.733	$(1,-2,1) \cap (7,1,-4)$	(4.6d)
8:11:14	0.571	0.786	$(1,-2,1) \cap (7,0,-4)$	(4.6c)
8:11:15	0.533	0.733	$(1,2,-2) \cap (7,1,-3)$	(4.6c)
8:11:17	0.471	0.647	$(3,-2,0) \cap (7,1,-4)$	(4.6d)
9:11:15	0.6	0.733	$(2,-3,1) \cap (5,0,-3)$	(4.6a,b,c)
9:12:13	0.692	0.923	$(3,-1,-1) \cap (1,-4,3)$	4.2b
9:12:14	0.643	0.857	$(2,2,-3) \cap (4,-3,0)$	4.2c
10:12:15	0.667	0.8	$(3,0,-2) \cap (3,-5,2)$	(4.2a,b)
10:13:15	0.667	0.867	$(3,0,-2) \cap (2,-5,3)$	(4.2a,b,c)
10:14:15	0.667	0.933	$(3,0,-2) \cap (1,-5,4)$	(4.2c)
11:14:16	0.688	0.875	$(4,-2,-1) \cap (2,-5,3)$	(4.2a,b,c)
11:15:16	0.688	0.938	$(3,-1,-3) \cap (1,-5,4)$	(4.2a,b)
11:17:19	0.579	0.895	$(1,-4,3) \cap (5,-2,-1)$	(4.2d)
12:15:17	0.706	0.882	$(3,-1,-3) \cap (2,-5,3)$	(4.2a,b)
17:21:24	0.708	0.875	$(3,0,-2) \cap (3,-7,4)$	(4.2a,b)

par réflexion du système, nous considérons seulement le quart positif du plan des conditions initiales. Plus précisément nous construisons l'application :

$$\begin{aligned} F_B : [0, P_L^{max}] \times [0, P_M^{max}] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (P_L, P_M) &\longrightarrow \left(\frac{\nu_L}{\nu_S}, \frac{\nu_M}{\nu_S} \right) . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Cette application associe les moments P_L et P_M du grand axe et de l'axe moyen du système aux nombres de rotation a_1 et a_2 , définis par les rapports des fréquences ν_L et ν_M , divisées par la fréquence ν_S conjuguée aux variables de petit axe. La zone de circulation peut être aussi générée en prenant des conditions initiales sur les variables spatiales et en fixant les moments égales à 0. Ceci était aussi conjecturé par Schwarzschild [170], dans le cas du potentiel logarithmique “scale free”, qui a appelé ces plans des “espaces initiales stationnaires” (“stationary start spaces”). En effet, les orbites “boîte” passant toujours par le centre du potentiel $x = y = z = 0$, la condition suffisante pour les générer est d'intégrer les équations de mouvement du système avec pour conditions initiales correspondant à un moment cinétique initiale nulle. Nous préférons de prendre des conditions initiales sur les moments car ces variables sont plus proches des variables d'action des systèmes à 1 degré de liberté. De plus, le plan choisi est une généralisation directe de la section employée pour l'exploration des orbites “boîte” bidimensionnelles (Section 3.7).

Nous construisons 12 applications fréquence représentatives (équation (4.5)) pour la partie de l'espace des phases occupée par des orbites “boîte”, en choisissant 10000 conditions initiales environs, sur le plan formé par les moments associés à l'axe moyen et au grand axe du système. Les applications fréquence sont exposées sur les Figures 4.2, 4.4 et 4.6. Les orbites sont intégrées pour un intervalle de temps équivalent à 100 périodes de l'orbite qui se déplace le long du grand axe de l'espace de configuration. Alors, la précision sur la détermination des fréquences fondamentales est de l'ordre de $10^{-7} - 10^{-8}$, pour des solutions du type KAM [110]. Chaque orbite est représentée par un point sur le plan (a_1, a_2) , ainsi permettant une étude très détaillée de la dynamique des orbites “boîte”. Pour expliquer mieux les aspects visuels de cette représentation nous devons signaler que l'image sur les plans des fréquences (ou, plus exactement, des nombres de rotation) est construite par la superposition des plusieurs courbes de fréquences (voir Section 3.7, Figures 3.12, 3.14, et 3.18) qui sont produites par une ligne de conditions initiales et en faisant des pas successifs sur l'autre direction [108].

D'abord, faisons quelques remarques sur les caractéristiques des applications fréquence en se concentrant sur la Figure 4.2a. La partie gauche de cette application fréquence contient des points arrangés avec un certain ordre. Dans cette région, l'application fréquence semble régulière et nous pouvons inférer que plusieurs conditions initiales correspondant à cette région de l'application génèrent des orbites quasi-périodiques qui évoluent sur des tores KAM. Toutefois, notons que, dans un problème hamiltonien à 3 degrés de liberté ou plus, les tores KAM ne peuvent pas séparer l'espace des phases du système (ils sont des objets de dimension supérieure ou égale à 3 dans une variété d'énergie de dimension supérieure ou égale à 5). Pour cette raison, les orbites générées dans l'espace complémentaire peuvent diffuser entre ces tores (d'après une conjecture d'Arnol'd [5]). Néanmoins, des résultats rigoureux récents de Morbidelli et Giorgilli [138] à partir des arguments de la théorie KAM [99], [3], [140] et aussi de la théorie de Nekhorochev [141] démontrent que les orbites qui sont générées dans un certain voisinage de chaque tore restent dans ce voisinage pour des temps superexponentiellement longs. Alors, les orbites correspondant à des conditions initiales dans les régions des applications fréquence, où le nombre de tores KAM est grand, ne diffuseront pas pour un temps très long.

Frequency Maps – Boxes

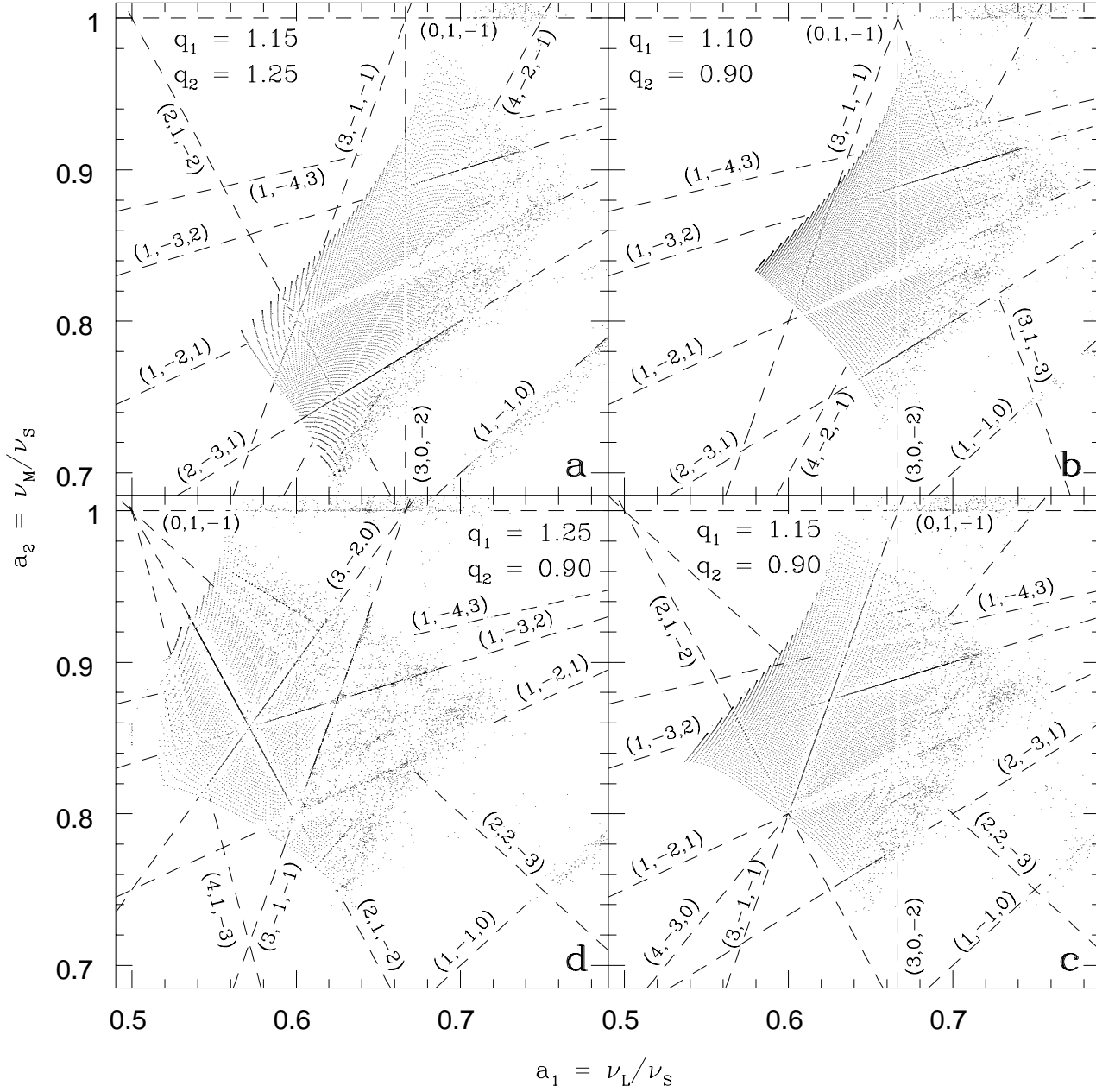


Figure 4.2 : Applications fréquence de la région de l'espace des phases correspondant aux orbites "boîte", pour des valeurs différentes des paramètres de perturbation (a) $q_1 = 1.15$, $q_2 = 1.25$, (b) $q_1 = 1.1$, $q_2 = 0.9$, (c) $q_1 = 1.15$, $q_2 = 0.9$ et (d) $q_1 = 1.25$, $q_2 = 0.9$ (voir Tableau 4.8 pour les paramètres de forme correspondants)

D'autre part, les régions régulières sont interrompues par plusieurs lignes sous la forme $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma = 0$, avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ (et au moins deux entre eux non nul). Ces lignes désignent les tores résonants du système. Ce réseau compliqué des lignes résonantes représentées sur les applications est une image instantanée du réseau d'Arnol'd du système. Les lignes résonantes représentées par des espaces vides correspondent à des tores avec un caractère hyperbolique (ce qu'on appelle des tores moustachus, voir [6], p.93). De plus, les lignes résonantes représentées par des traies plains correspondent à des tores résonants elliptiques (c.-à-d. la généralisation d'une île elliptique de stabilité, dans un système à 3 degrés de liberté) [108].

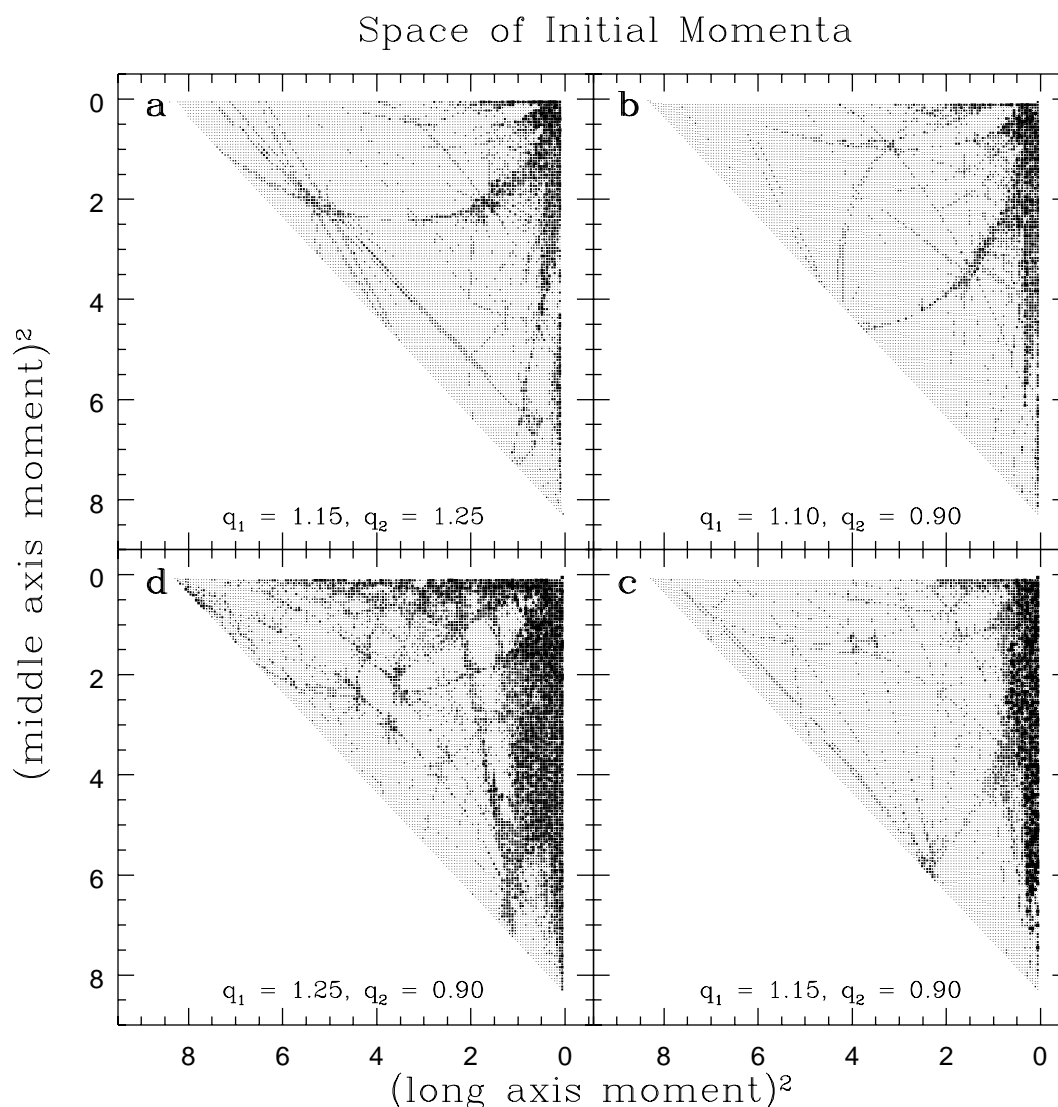


Figure 4.3 : Plans des conditions initiales (moments) correspondant aux orbites “boîte” dont les applications fréquence sont représentées sur la Figure 4.2

Les lignes horizontales, verticales et parallèles à la diagonale (pour α, β ou γ égale à 0) sont liées à des résonances des systèmes plans formés par les variables associées aux petit/moyen,

petit/grand ou moyen/grand axes, respectivement. Les lignes résonantes principales des deux premiers systèmes plans correspondent à des valeurs nulles des nombres de rotation ($\nu_L = 0$ ou $\nu_M = 0$) et se trouvent hors du cadre des diagrammes. Le troisième système plan ne peut pas être visualisé par cette application (équation (4.5)), parce que les nombres de rotation a_1 et a_2 sont singuliers pour $\nu_S = 0$. Toutes les autres lignes proviennent du couplage entre les résonances des systèmes plans. Les intersections entre les lignes résonantes indiquent des orbites périodiques qui peuvent être directement identifiées par les nombres de rotation donnés sur les axes des applications. Nous pouvons avoir une idée en ce qui concerne la stabilité des ces orbites, en examinant les lignes résonantes qui les définissent. Les lignes résonantes les plus marquantes sont prolongées par des traits interrompus fictifs et sont marqués par les trois paramètres correspondants (α, β, γ). De plus, toutes les orbites périodiques importantes peuvent être trouvées dans le Tableau 4.9, avec les valeurs de leurs nombres de rotation (a_1, a_2), les lignes résonantes, dont l'intersection indique l'existence de chaque orbite, ainsi que les labels des figures correspondantes. Notons, finalement, que les orbites périodiques rectilignes qui oscillent le long du grand, petit ou de l'axe moyen de l'espace de configuration n'appartiennent pas à l'application fréquence de l'équation (4.5) parce que les nombres de rotation sont soit singulières soit zéro (deux fréquences étant nulles). Toutefois, la partie gauche, la partie inférieure et la partie droite des applications, correspondent à des perturbations de chaque orbite périodique rectiligne, respectivement.

Dans la partie droite du diagramme de la Figure 4.4a, nous pouvons remarquer une région remplie par des points dispersés, où l'application fréquence est apparemment irrégulière. Dans ce cas, l'approximation quasi-périodique n'est plus valable et nous pouvons conclure que les points dispersés correspondent à des orbites chaotiques. Dans cette région de l'application, nous apercevons deux lignes d'accumulation des points. La première est formée dans la partie supérieur de l'application et elle correspond à une résonance 1:1 entre les variables associées à l'axe moyen et au petit axe. L'autre, qui est la diagonale du plan des fréquences, correspond à une résonance 1:1 entre les variables associées à l'axe moyen et au grand axe. En effet, ces lignes proviennent de la perturbation de l'orbite périodique de petit axe. Pendant l'étude de la stabilité linéaire des orbites périodiques rectilignes (Figure 2.4), nous avons remarqué que l'orbite rectiligne de petit axe (quelque soit la variable associée) est hyperbolique – hyperbolique, pour pratiquement toutes les valeurs des paramètres de perturbation, à part le cas sphérique intégrable (dans ce cas toutes les orbites périodiques rectilignes sont dégénérées). Par conséquent, nous pouvons conjecturer que, pour des valeurs des paramètres correspondant aux cas non-intégrables (pour $q_1, q_2 \neq 1$) cette orbite crée une variété stable et une variété instable de dimension 3 qui s'intersectent transversalement (suivant le théorème des variétés stables pour des orbites périodiques, voir [151], p. 207). Les intersection homoclines des ces variétés et le recouvrement des résonances voisines quand la perturbation augmente, génèrent la zone chaotique. En effet, ces régions chaotiques tracent les frontières entre la zone de circulation et les zones des libérations qui contiennent les orbites “tube de grand axe et “tube de petit axe”. Les deux lignes résonantes sont formées par des orbites chaotiques de circulation (des “boîte”) qui deviennent des orbites de libération (des orbites “tube”) et inversement. Le grand espace vide entre ces lignes et la partie principale de l'application est attribué à la forte hyperbolicité de l'orbite périodique, cette dernière étant liée à une singularité logarithmique sur les nombres de rotation (voir par exemple la Figure 3.10 et aussi [108]). Dans cette zone chaotique, elle vient s'ajouter la petite zone chaotique générée par la perturbation des variétés stables et instables de dimension 2 créées par l'orbite périodique de l'axe moyen (partie inférieure des applications) qui

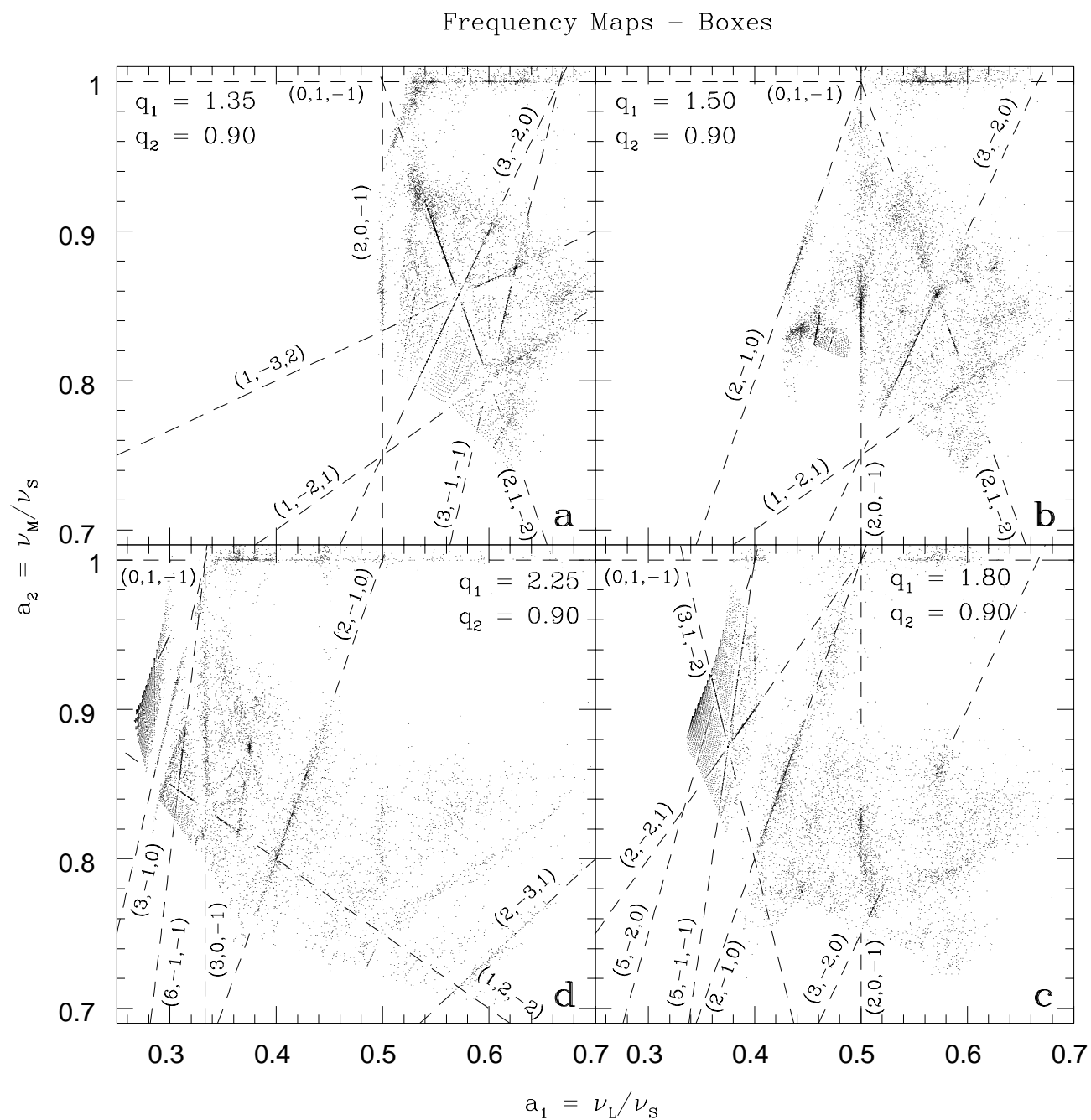


Figure 4.4 : Applications fréquence de la région de l'espace des phases correspondant aux orbites "boîte", pour des valeurs différentes des paramètres de perturbation (a) $q_1 = 1.35$, $q_2 = 0.9$, (b) $q_1 = 1.5$, $q_2 = 0.9$, (c) $q_1 = 1.8$, $q_2 = 0.9$ et (d) $q_1 = 2.25$, $q_2 = 0.9$ (voir Tableau 4.8 pour les paramètres de forme correspondants)

est partiellement hyperbolique pour les valeurs des paramètres de perturbation correspondant à toutes les applications étudiées.

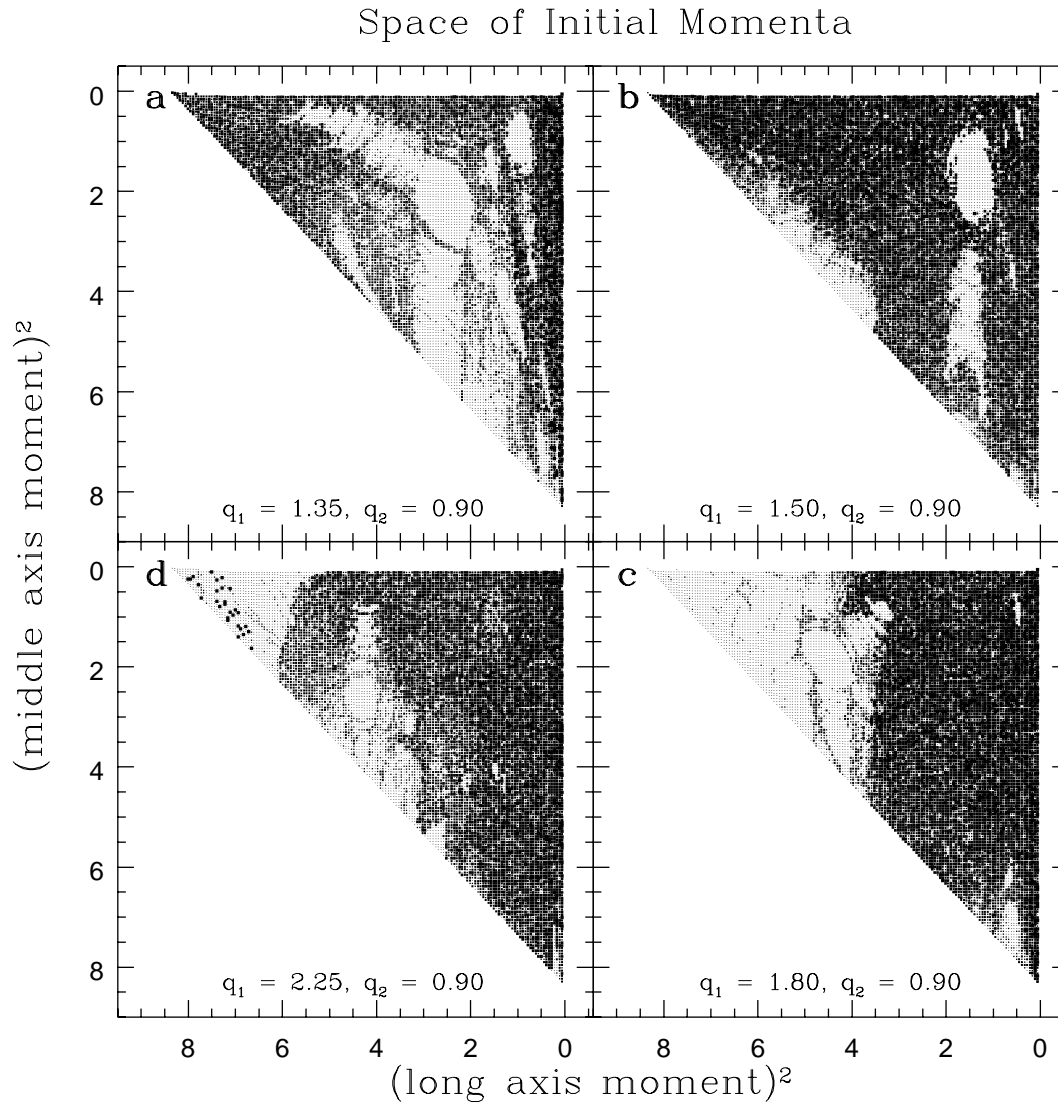


Figure 4.5 : Plans des conditions initiales (moments) correspondant aux orbites “boîte” dont les applications fréquence sont représentées sur la Figure 4.4

Le comportement dynamique du système s’avère assez compliquée comme il était aussi prédit par des études précédentes. Néanmoins, dans les études de Schwarzschild sur le potentiel logarithmique “scale free” [170] et les études récentes de Merritt et Fridman sur les modèles avec des singularités centrales [132], les seuls objets dynamiques identifiés étaient quelques résonances liées aux systèmes plans (celles qu’on appelle “boxlets” en dynamique galactique [136], [117]) et les orbites périodiques principales. Toutefois, les objets qui jouent le rôle fondamental sur la structure dynamique d’un système à 3 degrés de liberté sont les tores résonants (les couplages entre les “boxlets”). Les conditions des résonances associées ainsi que leurs tailles exactes sont

directement identifiées sur les applications fréquence. En effet, l'identification des toutes les caractéristiques liées à l'addition de la troisième dimension est généralement très difficile à travers les approches classiques employées dans des études précédentes.

L'évolution dynamique du système par rapport au changement des paramètres de perturbation peut être étudiée en comparant les applications fréquence successives. Dans les 8 premières applications (Figures 4.2 et 4.4), le rapport entre le moyen et le petit axe des surfaces équipotentielles est égale à 0.9, correspondant à un rapport axiale des surfaces de densité égale de 0.6 – 0.7, approximativement. D'autre part, en variant la valeur maximale associée au grand axe du système, nous obtenons des paramètres c/a entre 1/2 et 1/5 tandis que le paramètre de triaxialité T_p varie entre une valeur modérée ($T_p = 0.43$) et une valeur proche d'un modèle allongé $T_p = 0.98$ (voir Table 4.8).

La ligne résonante la plus importante (celle qui correspond à la valeur la plus petite de $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$) est pour $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -2, 1)$. Elle se trouve au milieu de toutes les applications fréquence de la Figure 4.2 et elle semble avoir un caractère fortement hyperbolique dans le plan des condition initiales choisies. Dans tous les diagrammes, la plupart de lignes résonantes sont liées à la perturbation de l'orbite périodique de petite axe (des lignes radiales dont la prolongation passe par le point $(a_1, a_2) = (1, 1)$ de l'application). Comme nous pouvons observer dans la Figure 4.2, quand la perturbation augmente, les lignes résonantes se recouvrent et les orbites peuvent diffuser à travers les résonances (voir [108], [110] pour des études numériques). En effet, nous pouvons remarquer sur la Figure 4.2d qui correspond à la valeur la plus élevée de la perturbation pour ce groupe d'applications, que tous les tores sont détruits jusqu'à la ligne résonante (3,-1,-1) et une large région chaotique est produite. En outre, la variation des équipotentielles permet l'apparition des nouvelles conditions résonantes. Le dernier commentaire pour ce groupe d'applications concerne l'orbite périodique de grand axe. Pour les valeurs des paramètres correspondant aux trois premières applications, l'orbite est elliptique – elliptique, ce qui peut être aussi confirmé par la régularité de la région de la partie gauche des diagrammes. D'autre part, suivant l'analyse de stabilité effectuée dans la Section 2.3.1, cette orbite devient partiellement hyperbolique pour les paramètres de perturbation correspondant à l'application de la Figure 4.2d ($q_1 = 1.25, q_2 = 0.9$). Par conséquent, nous pouvons remarquer la petite zone irrégulière au voisinage de cette orbite, caractérisée par les points dispersés dans la partie gauche de l'application.

A part les applications fréquence, une représentation très utile de la dynamique des orbites “boîte” est illustrée sur les Figures 4.3, 4.5 et 4.8. Sur ces images, chaque condition initiale est caractérisée par un certain paramètre de diffusion (les axes représentent les carrés des moments initiales). En effet, nous obtenons les nombres de rotation de chaque orbite à travers une deuxième approximation quasi-périodique, en continuant l'intégration pour 100 périodes supplémentaires. Alors, nous calculons le maximum entre les dérivées temporelles du couple des nombres de rotation consécutifs (voir [108], [110], [62], [114]). Chaque point du graphique est marqué par ce paramètre de diffusion en utilisant 5 différents niveaux de gris suivant le logarithme du paramètre de diffusion. Les points fins représentent des orbites quasi-périodiques. Une tentative de construire des diagrammes du genre pour des modèles galactiques était déjà réalisée par Schwarzschild [170] et par Merritt et ses collaborateurs [132], [133] en utilisant les exposants des Lyapounov classiques pour distinguer les mouvements réguliers par les mouvements chaotiques. L'avantage de notre représentation, en dehors du balayage rapide et détaillé de toute la zone en question, est le fait qu'elle est basée sur le calcul des nombres de rotation qui peuvent être considérées comme des intégrales numériques du mouvement.

Frequency Maps – Boxes

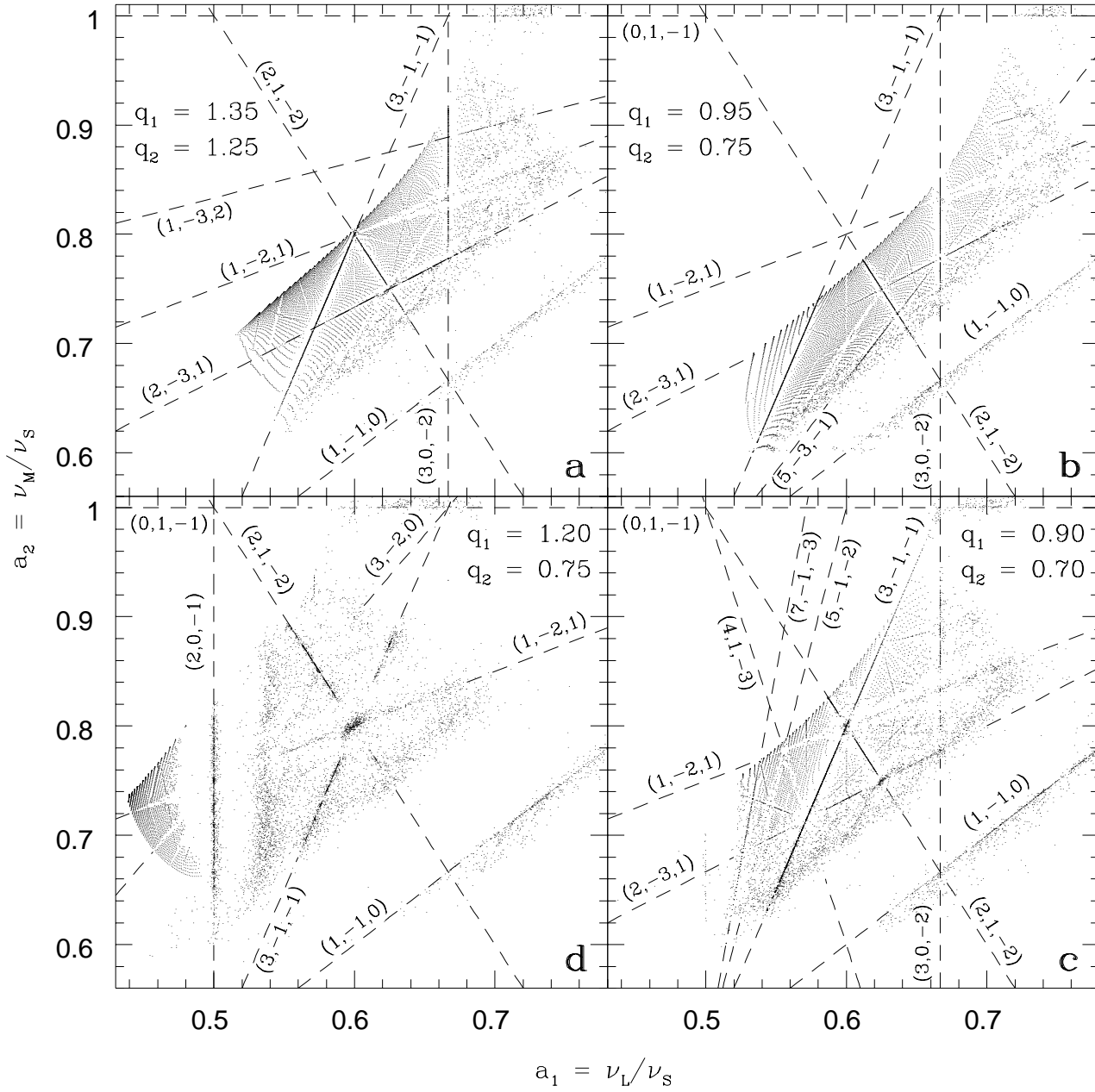


Figure 4.6 : Applications fréquence de la région de l'espace des phases correspondant aux orbites "boîte", pour des valeurs différentes des paramètres de perturbation (a) $q_1 = 1.35$, $q_2 = 1.25$, (b) $q_1 = 0.95$, $q_2 = 0.75$, (c) $q_1 = 0.9$, $q_2 = 0.7$ et (d) $q_1 = 1.2$, $q_2 = 0.75$ (voir Tableau 4.8 pour les paramètres de forme correspondants)

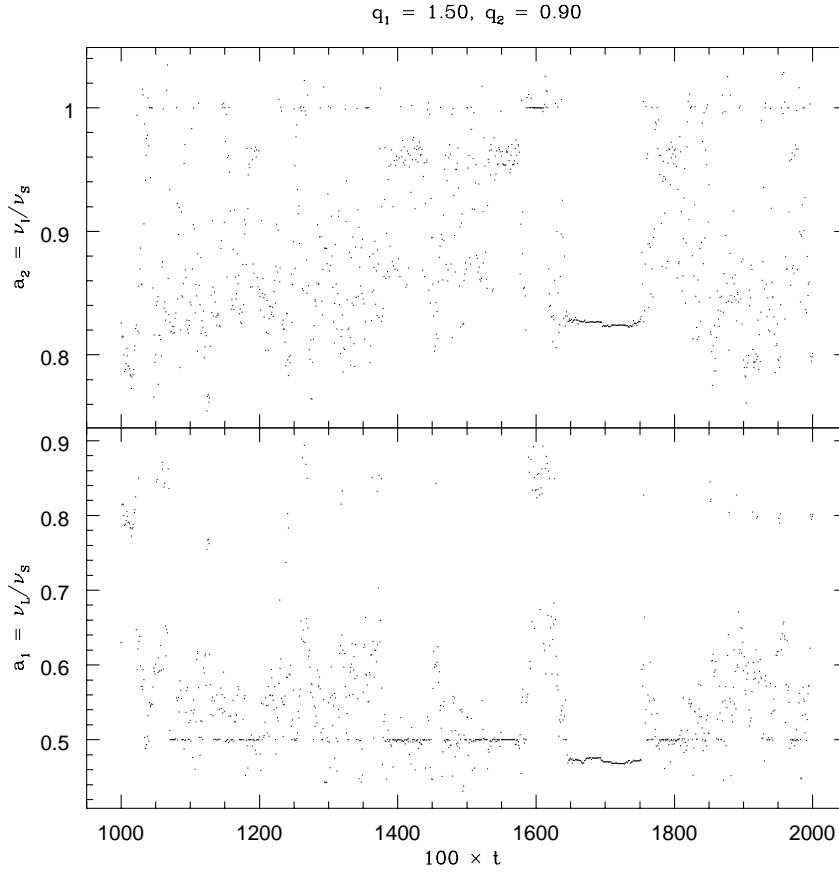


Figure 4.7 : Représentation de la diffusion d’une orbite irrégulière typique à l’intérieur de la zone chaotique, pour $q_1 = 1.5$ et $q_2 = 0.9$. Nous calculons pour plusieurs tranches du temps les nombres de rotation de l’orbite et nous représentons leur évolution par rapport au temps

Dans le premier groupe d’applications (Figure 4.3), nous pouvons observer que la région la plus irrégulière correspond aux orbites générées par des petites valeurs du moment de grand axe. Les orbites “boîte” correspondantes évoluent proche du plan formé par l’axe moyen et le petit axe de l’espace de configuration. Ce fait souligne encore une fois l’importance de l’influence de l’hyperbolicité des deux orbites rectilignes qui se déplacent sur ces axes. Sur les Figures 4.3, nous pouvons aussi apercevoir les conditions initiales de tores résonants qui apparaissent comme des lignes droites ou des courbes³ grises. Quand la perturbation est amplifiée, une région plus large des diagrammes devient irrégulière. Comme nous avons déjà remarqué, pour $q_1 = 1.25$ et $q_2 = 0.9$, une région chaotique apparaît dans la partie inférieure du diagramme, proche du grand axe du système, étant donné que l’orbite périodique correspondante est devenue partiellement hyperbolique.

Sur les quatre applications de la Figure 4.4, où le paramètre de triaxialité prend des valeurs qui approchent des modèles allongés, la partie irrégulière de l’espace des phases est élargie. En

³Si le carré des moments était exactement égale aux actions d’un système des rotateurs couplés toutes les lignes de résonances auraient dues apparaître comme des lignes droites.

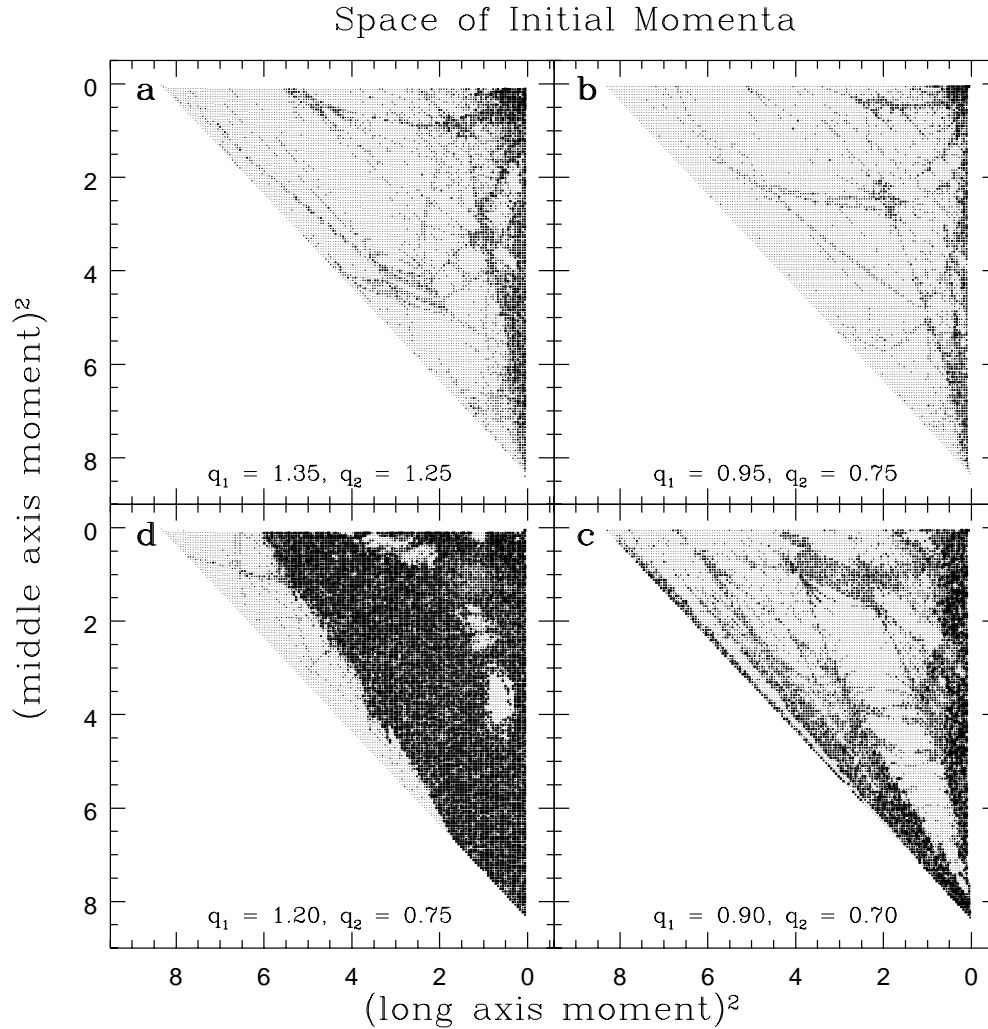


Figure 4.8 : Plans des conditions initiales (moments) correspondant aux orbites “boîte” dont les applications fréquence sont représentées sur la Figure 4.6

effet, comme nous avons mentionné auparavant, ceci est dû en grand partie à l’hyperbolicité de l’orbite axiale de grand axe et l’apparition de la ligne de résonance $(2,0,-1)$, dans la région gauche de la Figure 4.4a. A cause du recouvrement des résonances, la grande majorité des orbites représentées sur cette application fréquence sont irrégulières. Seulement une petite zone en bas du diagramme semble régulière. Les orbites irrégulières sont multipliées sur l’application 4.4b, où presque toutes les orbites “boîte” sont irrégulières. Les lignes principales d’accumulation des points sur la partie centrale de l’application correspondent à des tores résonants qui viennent d’être détruits, et le point qui semble d’attirer les orbites correspond à l’orbite périodique elliptique 4:6:7. Une image descriptive de l’influence de ce phénomène sur la diffusion des orbites chaotiques est représentée sur la Figure 4.7. Comme dans le cas du système plan (voir Figure 3.16), nous calculons pour des tranches du temps successives les nombres de rotation d’une orbite chaotique intégrée pour un intervalle de temps assez long (50000 périodes environs) et nous

traçons leurs évolutions par rapport au temps. Nous remarquons clairement que même si l'orbite est fortement chaotique, elle reste piégé pour quelques temps proche des orbites périodiques (les nombres de rotation sont constants) ou des tores résonants à cause des corrélations à long termes au voisinage des résonances ([37], [96], [172] et pour une revue [119], p. 328). Celle-ci est la raison principale pour laquelle nous ne pouvons pas considérer qu'une orbite chaotique remplit ergodiquement la région chaotique même si elle est caractérisée par un taux de diffusion assez élevé.

Le changement important du comportement de la zone de circulation de l'espace des phases est aussi visible dans l'espace des conditions initiales. En effet, une très large proportion de ces diagrammes (Figures 4.5a et b) est entièrement noircie, à cause des grandes valeurs du paramètre de diffusion. Seule une petite région au milieu du diagramme de la Figure 4.5b semble régulière pour l'intervalle de temps correspondant.

La situation change légèrement dans le cas de la Figure 4.4c, pour $q_1 = 1.8$ et $q_2 = 0.9$. Pour ces valeurs des paramètres de perturbation, l'orbite rectiligne de grand axe redevient elliptique et la partie gauche du diagramme est remplie par des orbites régulières. Cette région régulière est aussi visible sur la partie gauche de l'espace des conditions initiales de la Figure 4.5c, proche de l'orbite périodique de grand axe, correspondant à une valeur maximum du moment associé. En outre, nous pouvons remarquer l'apparition des quelques lignes résonantes nouvelles et leurs traces peuvent être aussi identifiées dans la partie gauche du diagramme des conditions initiales.

Pour des valeurs du paramètre de perturbation q_1 entre 1.80 et 2.25 (Figures 4.4c et d) l'orbite périodique de grand axe est devenu hyperbolique et nous observons la bifurcation de l'orbite périodique 3:0:1. La perturbation de cette orbite fait apparaître la ligne résonante (3,0,-1) et d'autres lignes qui proviennent du couplage de cette orbite avec des résonances. En augmentant la perturbation, cette orbite périodique redevient elliptique. Sur la dernière application de ce groupe, toutes les résonances jusqu'à la ligne (3,-1,0) sont recouvertes. De plus, l'orbite périodique de grand axe est redevenu hyperbolique et par conséquent l'orbite périodique 4:0:1 apparaît. Cette instabilité peut être aperçu sur le plan des conditions initiales où la partie supérieure de ce diagramme proche de cette orbite semble irrégulière.

Ce comportement fortement chaotique des orbites de circulation, pour des petites valeurs des paramètres b/a et c/a (approchant des modèles allongés) n'est pas étonnant. Dans le cas du problème plan (voir Section 3.7), pour des valeurs du rapport axial q qui sont similaire avec le rapport entre le petit et le grand axe des modèles triaxiaux étudiés, nous étions capable de discerner l'existence des plusieurs résonances qui étaient même entourer par des petites zones chaotiques. Alors, en ajoutant un degré de liberté, l'interaction entre ces résonances à cause du couplage, même pour des valeurs des rapports axiaux qui sont proches, produit des zones chaotiques assez larges. L'effet de l'addition d'un degré de liberté est aussi apparent dans le premier groupe d'applications (Figure 4.2), par opposition aux cas plans associés, qui étaient plutôt réguliers et avec des zones chaotiques assez petites (Section 3.7, Figure 3.11).

Le dernier groupe d'applications représente des modèles plus plats par rapport à ceux de la Figure 4.2 ($c/a \approx 2/5 - 1/5$). De plus, le rapport entre le moyen et le petit axe nous permet d'avoir des modèles aplatis ($T_p = 0.25$) et au delà (Table 4.8). L'orbite rectiligne de petit axe est toujours hyperbolique – hyperbolique. Alors, nous pouvons remarquer l'existence d'une zone chaotique dans son voisinage. De plus, plusieurs lignes résonantes apparaissent, qui sont les résultats des interactions entre l'orbite périodique de petite axe et les résonances des systèmes plans. D'autre part, l'orbite périodique de l'axe moyen est partiellement hyperbolique pour toutes les valeurs des paramètres de perturbation correspondants. Alors, elle génère aussi une

petite zone chaotique (au bord inférieur des applications). Tous ces aspects sont clairement visibles sur l'espace des conditions initiales, où, comme auparavant, la plupart des conditions correspondant à des orbites chaotiques sont localisées au voisinage du système plan formé par les variables associées au petit axe et à l'axe moyen du système. Dans les premières deux applications, nous remarquons des lignes résonantes qui sont originaires du système plan formé par les variables associées à l'axe moyen et au petit axe (lignes verticales (3,0,-2) et (5,0,-3)) et d'autres lignes qui apparaissent à cause du couplage. Ces résonances sont aussi visibles dans l'espace des conditions initiales, apparaissant comme une toile d'araignée qui pénètre à l'intérieurs des régions régulières.

Sur la Figure 4.6c, nous remarquons l'apparition de la ligne résonante (2,0,-1), qui est liée à l'hyperbolicité de l'orbite périodique de grande axe et la bifurcation de l'orbite périodique 2:0:1 du système plan. Alors, la zone chaotique est étendue jusqu'à cette partie du diagramme, représentée par les régions grises au voisinage de cette orbite. Elle occupe aussi la partie de l'espace des conditions initiales proche du système plan formé par les variables associées au grand et au petit axe (Figure 4.8c). L'effet du recouvrement des résonances est plus apparent au voisinage de l'orbite périodique du petit axe dans la partie gauche de l'application. Finalement, avec l'amplification de la perturbation, le recouvrement des tous ces tores résonants génère une zone chaotique assez large. Les régions qui apparaissent moins irrégulières au centre de l'espace des conditions initiales correspondent à des orbites qui sont piégées par des tores résonants qui viennent d'être détruits⁴ (Figure 4.8d). Ces lignes s'intersectent sur l'orbite périodique 3:4:5. D'autre part, le voisinage de l'orbite périodique de grand axe est régulière, l'orbite étant elliptique dans ce cas (Section 2.3.1). Pour cette dernière application, où les régions chaotiques s'étendent dans un échelle assez grand, le paramètre de triaxialité T_p est égale à 0.5 et le rapport entre le petit et le grand axe c/a est égale à 1/5, approximativement.

Orbites “tube”

Tandis que la zone de circulation peut être représentée en choisissant des conditions initiales sur une surface qui correspond à un moment cinétique initial nul, (en posant, par exemple, tous les valeurs des variables des positions où des moments égales à zéro), la situation est beaucoup plus complexe pour les zones de libration. Dans ces régions, les composantes du moment cinétique varient dans une grande gamme des valeurs initiales. Alors, sur chaque plan des conditions initiales produits en annulant trois variables qui ne sont pas conjuguées et en évoluant dans les trois autres, sur la variétés d'énergie constante, nous n'attendons pas de représenter un seul type d'orbite. En effet, nous sommes capable de distinguer le type d'orbite généré par chaque condition initial à travers les fréquences d'amplitude maximale des approximations quasi-périodiques. Les régions occupées par des orbites différentes, sont tracées sur la Figure 4.9 pour les 6 plans des conditions initiales qui restent, en choisissant deux rapport axiaux proche du cas sphérique ($q_1 = 1.1$ et $q_2 = 0.9$). Les zones remplies par des orbites “boîte” sont représentées par des espaces vides, les points fins représentent les orbites “tube intérieur de grand axe”, et les régions grises sont occupées par des orbites “tube extérieur de grand axe” et des orbites “tube de petite axe”, respectivement. Les points gras correspondent à des orbites chaotiques qui bornent les différents types des mouvements quasi-périodiques. Rappelons que les variables des positions x , y et z sont associées au moyen, grand et petit axe, respectivement,

⁴Suivant les travaux de MacKay *et al.* [123], pour des valeurs critiques de la perturbation, les tores se détruisent en formant des ensembles de Cantor et les orbites sont piégés au voisinage de ces objets

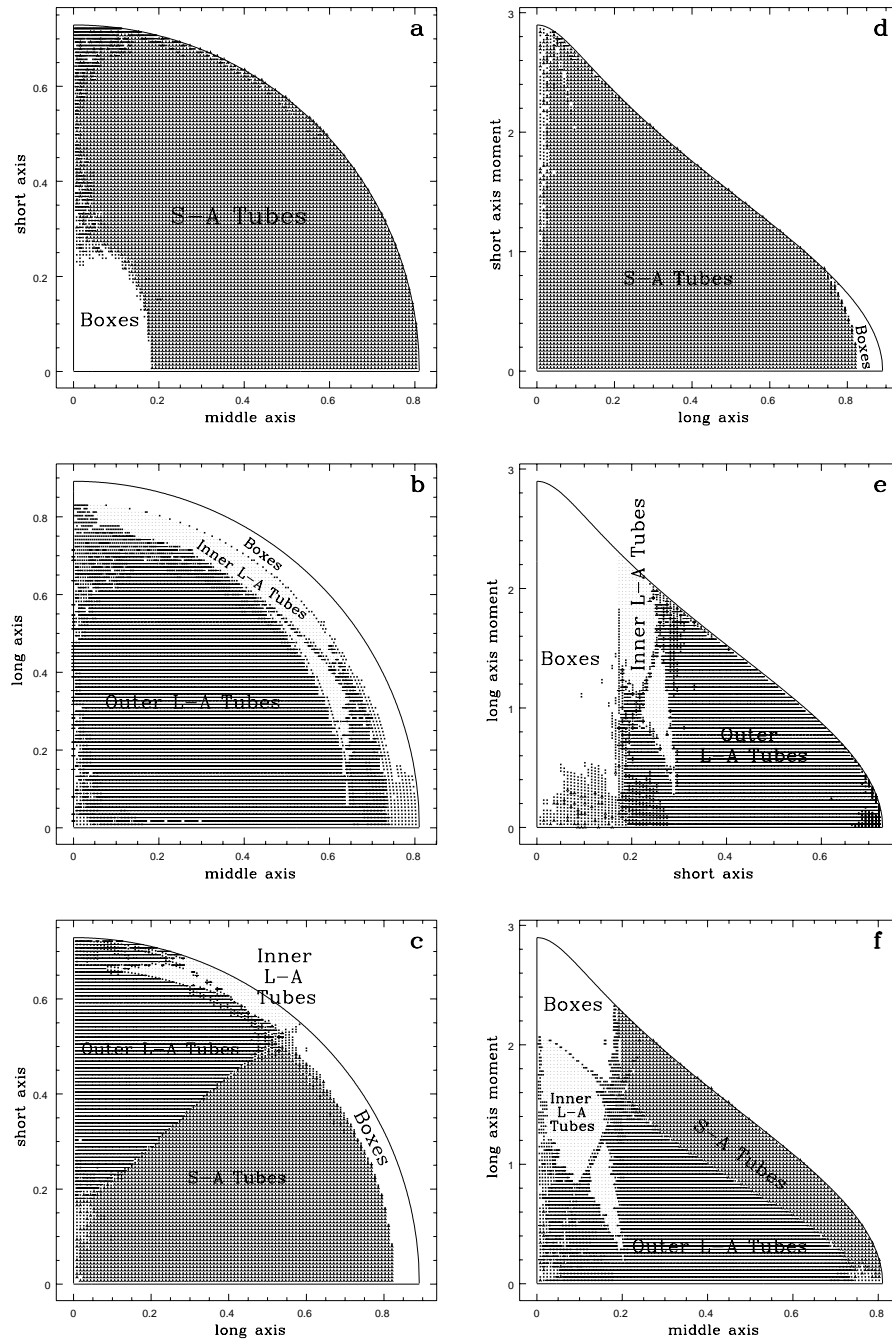


Figure 4.9 : Plans des conditions initiales représentant les régions occupées par des différents types d'orbites, pour $q_1 = 1.1$ et $q_2 = 0.9$. Ces plans sont construits en fixant trois variables à zéro et en faisant évoluer les trois variables qui restent : (a) positions associées au moyen et petit axe et moment associé au grand axe (x_0, z_0, Y_0), (b) positions associées au grand et à l'axe moyen et moment associé au petit axe (x_0, y_0, Z_0), (c) positions associées au grand et au petit axe et moment associé à l'axe moyen (y_0, z_0, X_0), (d) position associée au grand axe et moments associés au petit et à l'axe moyen (y_0, Z_0, X_0), (e) position associée au petit axe, et moments associés au grand et à l'axe moyen (z_0, Y_0, X_0) et (f) position associée à l'axe moyen et moments associés au grand et au petit axe (x_0, Y_0, Z_0)

pour les rapports axiaux choisis.

Comme nous avons mentionné ci-dessus, la répartition des différents types d'orbites sur ces images peut être élucidée à travers les composantes du moment cinétique initial (voir aussi [170]). Pour le couple des paramètres de perturbation choisi, les composantes parallèles au moyen, grand et petit axe de l'espace de configuration sont représentées par $L_M = yZ - zY$, $L_L = xZ - zX$ et $L_S = xY - yX$, respectivement. Plus précisément, les composantes parallèles au petit et au grand axe jouent un rôle important sur la structure hamiltonienne du système : elles correspondent aux intégrales des hamiltoniens intégrables, dont la perturbation génère les orbites “tube”, comme nous avons montré dans les équations (4.2)–(4.4). En effet, ceci est en relation étroite avec la caractérisation physique des orbites, c.-à-d. leur forme dans l'espace de configuration.

Les diagrammes peuvent être divisés en trois groupes, suivant les valeurs des composantes du moment cinétique. Les espaces des conditions initiales représentés sur les Figures 4.9a et 4.9d correspondent généralement à des valeurs initiales non-nulles des composantes du moment cinétique parallèles au moyen et au petit axe. Le moment cinétique de l'axe moyen n'est pas lié aux mouvements quasi-périodiques du système : la perturbation du système axisymétrique sur la surface formée par les variables associées au grand et au petit axe ne crée pas des orbites quasi-périodiques à cause de l'hyperbolicité partielle de l'orbite périodique circulaire correspondante (voir Section 4.2.2). Au contraire, la composante du moment cinétique associé au petit axe est liée avec la production des orbites “tube de petit axe”. En outre, ces plans contiennent quelques orbites “boîte” aussi, pour des petites valeurs du moment cinétique initial, qui correspondent aux coins bas gauche et droite des figures, c.-à-d. pour des conditions initiales qui correspondent à des petites valeurs des variables de l'axe moyen x_0 et X_0 , respectivement.

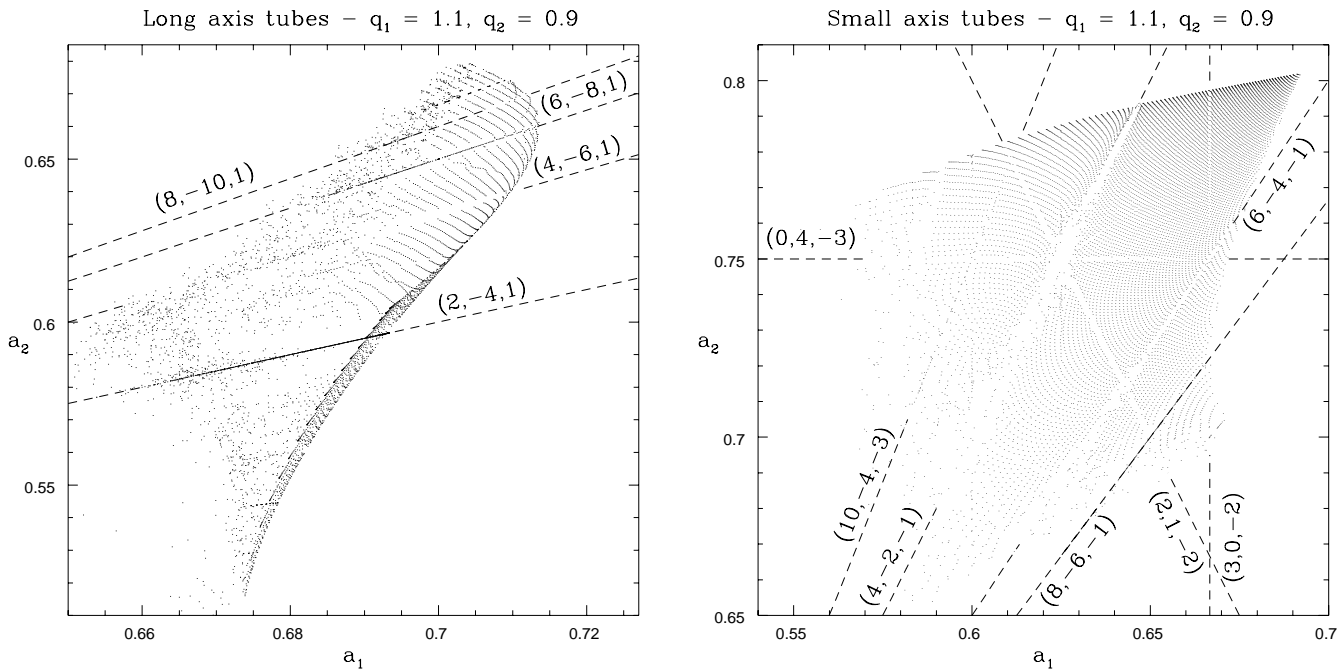


Figure 4.10 : Applications fréquence pour des orbites “tube de petit axe” et des orbites “tube extérieur de grand axe” $q_1 = 1.1$ et $q_2 = 0.9$

Les plans des conditions initiales représentés sur les Figures 4.9b et 4.9e correspondent à des valeurs non-nulles de la composante du moment cinétique suivant le grand axe. Alors, naturellement, des orbites “tube extérieur de grand axe” sont produites, jusqu’au moment où le moment cinétique initial de grand axe atteint une valeurs critique, pour laquelle les variables associées au grand axe commencent la circulation. Ces régions, qui correspondent à des valeurs assez importantes de la variable des positions associée au grand axe y , sont occupées par des orbites “tube intérieurs de grand axe” (voir Tableau 4.6). Comme auparavant, les conditions initiales, pour lesquelles le moment cinétique disparaît, génèrent des orbites “boîte”.

Finalement, sur les plans (y_0, z_0, X_0) et (x_0, Y_0, Z_0) , la situation est plus compliquée : les deux composantes du moment cinétique parallèles au grand et au petit axe acceptent des valeurs initiales non-nulles. Alors, d’orbites de tous les genres sont produites (voir Figures 4.9c et f), suivant quelle composante du moment cinétique est dominante. En effet, des orbites “tube de petit axe” occupent la région qui correspond à des valeurs élevées de la composante du moment cinétique initial, c.-à-d. dans le cas où les produits $z_0 X_0$ (Figure 4.9c) ou $x_0 Z_0$ (Figure 4.9f) atteignent des grandes valeurs. Les orbites “tube extérieur de grand axe” apparaissent quand le moment cinétique de grand axe, c.-à-d. les produits $x_0 Y_0$ ou $y_0 X_0$ sont larges pour chaque plan, respectivement. Quand les variables associées au grand axe atteignent des valeurs qui permettent la circulation suivant cette direction, les orbites deviennent des orbites “tube intérieurs de grand axe”. Finalement, les “boîte” sont confinées sur les régions où les composantes du moment cinétique sont proches de zéro.

Un aspect dynamique important du système qui était peu étudié dans les travaux précédents est l’existence des zones chaotiques qui séparent les différents types des mouvements quasi-périodiques, à l’intérieur des zones de libration du système. En effet, comme nous avons mentionné dans le cas des orbites “boîte” (voir Section 4.3.2), l’existence des ces régions est en relation avec la stabilité des orbites périodiques rectilignes. Pour les valeurs des rapports axiaux employés, l’orbite périodique de grand axe est linéairement elliptique, tandis que les orbites périodiques de moyen et de petit axe sont simplement et doublement hyperboliques, respectivement (Figure 2.4). Comme nous avons souligné dans la Section 4.3.2, la perturbation des hamiltoniens à 1 degré de liberté associés à ces orbites, en ajoutant 2 dimensions asymétriques, créent une variété stable et une variété instable de dimension 2, dans le cas de l’orbite partiellement hyperbolique, et de dimension 3, dans le cas de l’orbite hyperbolique – hyperbolique. Dans chaque cas, la variété stable intersecte transversalement avec la variété instable correspondante et des zones chaotiques sont produites, qui peuvent être élargies avec l’amplification de la perturbation. Les traces des ces régions, et spécialement de la zone générée par la perturbation du système formé par les variables associées au petite axe, sont en effet très apparentes sur les plans des conditions initiales de la Figure 4.9.

Plus précisément, sur les Figures 4.9a et d, la zone chaotique générée par l’orbite périodique de petit axe sépare les orbites “boîte” par les orbites “tube de petit axe”. De plus, à cause de l’hyperbolicité partielle de l’orbite périodique de l’axe moyen, il existe aussi une petite zone chaotique, au moins pour des conditions initiales très proches du système créé par les variables associées à l’axe moyen et au grand axe. Sur les Figures 4.9b et e, la zone chaotique générée par la perturbation de l’orbite périodique de petit axe apparaissent dans trois régions de l’espace des conditions initiales. La petite région chaotique au voisinage de l’orbite périodique de l’axe moyen est superposée avec la zone chaotique produite par la perturbation de l’orbite périodique de petit axe sur la partie extérieure, la partie droite et la partie inférieure de chaque diagramme, respectivement. Notons que les variétés perturbées de l’orbite périodique de petit axe bornent

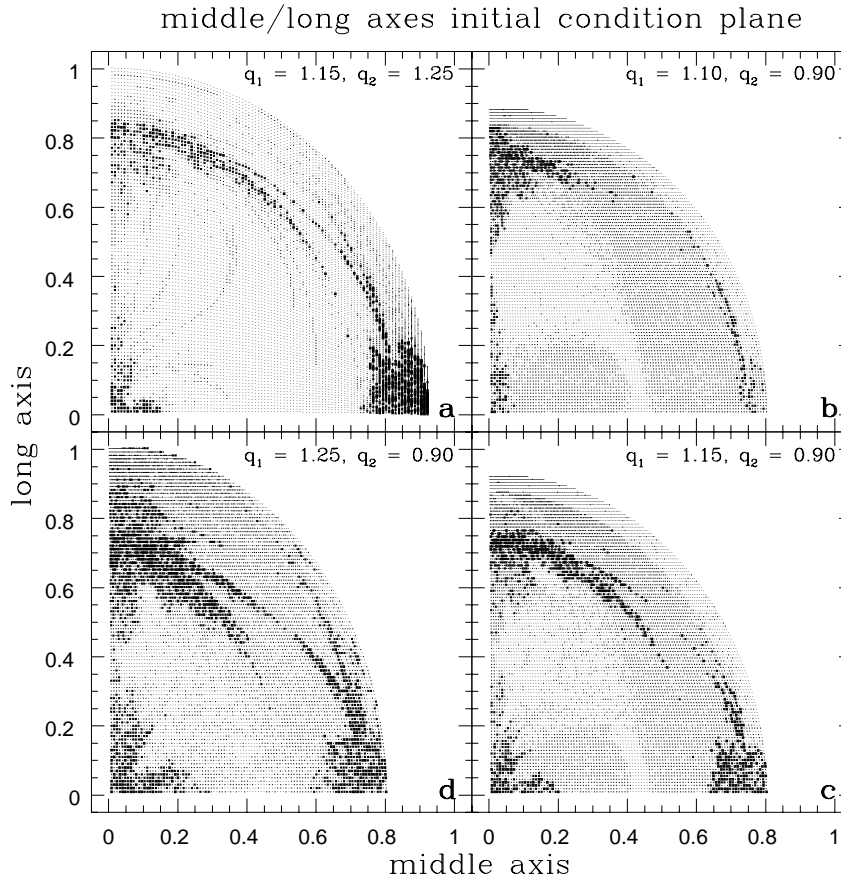


Figure 4.11 : Plans des conditions initiales dans les positions associées à l’axe moyen et au grand axe occupés par les deux familles d’orbites “tube de grand axe” et des orbites “boîte”, pour des valeurs différentes des paramètres de perturbation (**(a)** $q_1 = 1.15$, $q_2 = 1.25$, **(b)** $q_1 = 1.1$, $q_2 = 0.9$, **(c)** $q_1 = 1.15$, $q_2 = 0.9$ et **(d)** $q_1 = 1.25$, $q_2 = 0.9$)

les différents types d’orbites, en séparant aussi les orbites “tube intérieur de grand axe” en deux parties. Ce phénomène est aussi très apparent sur les deux dernières figures (Figures 4.9c et f), où les zones chaotiques générées à cause de l’hyperbolicité de l’orbite périodique de petit axe sépare les quatre types d’orbites.

D’autre part, dans le cas de l’espace des conditions initiales sur les variables des positions associées au moyen/petit axe et au moyen/grand axe, la région chaotique s’éteint le long du petit et du grand axe du système, respectivement, à cause de l’hyperbolicité partielle de l’orbite périodique “circulaire” du système plan correspondant. Nous avons déjà indiqué (Section 2.3.3 et 3.2.2) que dans le cas plan intégrable (pour des valeurs des variables associées à l’axe moyen égales à zéro et un rapport axial égale à 1), il existe une famille d’orbites quasi-périodiques, paramétrées par la valeur constante du moment cinétique, qui tournent autour de l’orbite circulaire (voir Figure 2.5). Dans le cas du système complet, (en posant les variables de l’axe moyen légèrement différentes de zéro), ces orbites correspondent à une famille à un paramètre des tores hyperboliques, ce qu’on appelle des tores moustachus. Cresson [50] a donné un résultat

rigoureux en ce qui concerne l'existence et la persistance d'un grand nombre de ces tores dans le cas du système triaxial, pourvu que le rapport axial entre le petit et l'axe moyen est suffisamment proche de 1, dans le sens de la théorie KAM. De plus, il a prouvé que, sous ces hypothèses et comme la deuxième intégrale est détruite (le moment cinétique), pour chaque tore moustachu, il existe un certain voisinage dans lequel la variété stable de chaque tore hyperbolique s'intersecte transversalement avec la variété instable du tore hyperbolique initial. Alors, une chaîne de transition est formée, à travers laquelle les orbites peuvent diffuser, un processus qu'on appelle diffusion d'Arnol'd [5], [6]. Le système logarithmique fournit un parmi les rares exemples découverts jusqu'à maintenant pour lesquels l'existence des orbites d'instabilité peut être démontrée rigoureusement, même si ce type de diffusion doit être extrêmement lente pour avoir une influence sur la physique des galaxies. Néanmoins, quand la perturbation augmente, cette instabilité est responsable pour les régions chaotiques sur les Figures 4.9a et c, pour des conditions initiales très proche du système plan sur la surface formée par les variables associées au petit et au grand axe (pour des petites valeurs des variables de l'axe moyen).

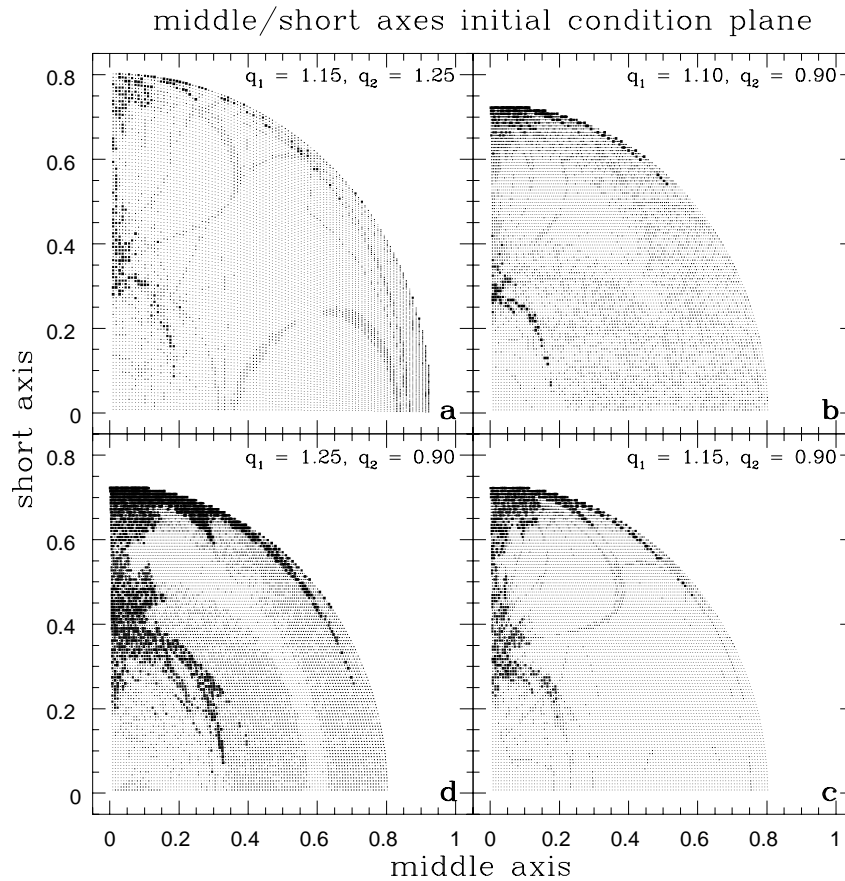


Figure 4.12 : Plans des conditions initiales dans les positions associées à l'axe moyen et au petit axe occupés par les deux familles d'orbites "tube de grand axe" et des orbites "boîte", pour des valeurs différentes des paramètres de perturbation (a) $q_1 = 1.15, q_2 = 1.25$, (b) $q_1 = 1.1, q_2 = 0.9$, (c) $q_1 = 1.15, q_2 = 0.9$ et (d) $q_1 = 1.25, q_2 = 0.9$

Faisons maintenant quelques remarques en ce qui concerne la répartition des orbites quasi-périodiques sur les plans des conditions initiales. En effet, ces figures sont très similaires aux diagrammes des classifications dans l'espace des phases des systèmes de Stäckel, projetés sur une surface d'énergie constante [56], [178], [91], [170]. Dans ces cas, cependant, le plan formé par les conditions initiales des variables associées au grand et au petit axe peut couvrir le comportement dynamique possible du système. Au contraire, dans le cas du système logarithmique (et du modèle “scale free”) ceci n'est pas vrai. Schwarzschild [170] a effectué son étude pour les orbites “tube” du système “scale free” sur ce plan, en supposant que la majorité des orbites doivent le traverser. Néanmoins, dans notre cas, nous pouvons montrer en examinant les gammes des nombres de rotation des orbites sur chaque plan des conditions initiales, que presque toutes les orbites possibles peuvent être obtenues en choisissant des conditions initiales sur deux plans : l'un formé par les conditions initiales dans les variables des positions associées au grand et à l'axe moyen, pour les orbites “tube de grand axe” (Figure 4.9a), et un deuxième formé par les conditions initiales dans les variables des positions associées au petit et à l'axe moyen (Figure 4.9c), pour l'étude des orbites “tube de petit axe”. Ce choix semble plus approprié, comme il est aussi dicté par l'approche perturbative que nous avons suivi pour expliquer l'existence de ces orbites (Section 4.2.2).⁵

En effet, la complexité des espaces des conditions initiales montre que les coordonnées cartésiennes ne fournissent pas une paramétrisation adéquate pour l'étude des zones de libration. Des plus, à cause de la symétrie par rapport au moment cinétique, les mêmes orbites “tube” peuvent être produites dans des endroits différentes du même plan des conditions initiales. Pour les orbites “tube de petit axe” et “tube extérieur de grand axe”, il suffit d'examiner les valeurs initiales du moment cinétique [170]. Ces quantités prennent des valeurs similaires dans deux parties différentes des plans des conditions initiales qui sont “symétriques” par rapport à une courbe qui correspond à des valeurs maximum du moment cinétique. Cette courbe passe par les deux orbites périodiques “circulaires” des problèmes plans, dont les conditions initiales se trouvent sur les axes des plans des conditions initiales. Cette ligne désigne des orbites qu'on appelle des orbites “tube” minces parce qu'elles sont produites par une petite perturbation des orbites périodiques planes correspondantes [91]. Pour les orbites “tube de petit axe” et “tube extérieur de grand axe”, une meilleure paramétrisation pourrait être fournie par les coordonnées polaires du système plan correspondant, comme pour les orbites “boucle” du système plan (Section 3.7), et en prenant des conditions initiales suivant les composantes du moment cinétique. Néanmoins, cette transformation ne peut pas être appliquée dans le cas des orbites “tube intérieur de grand axe” qui sont séparés par la zone chaotique associées à l'orbite périodique de petit axe. Ce qui semble d'être plus ennuyeux est que même dans le cas des orbites “tube de petit axe” et “tube extérieur de grand axe” les coordonnées polaires n'améliorent pas substantiellement la paramétrisation des zones de libration. Ce dernier fait était très apparent dans les simulations numériques dirigées pour produire des applications fréquence pour ces zones, comme dans le cas des orbites “boîte”. En effet, pour les orbites “tube de grand axe”, l'application fréquence est :

$$F_T : [0, L_L^{max}] \times [0, L_M^{max}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(L_L, L_M) \longrightarrow \left(\frac{\nu_{\theta_{LM}}}{\nu_{r_{LM}}}, \frac{\nu_L}{\nu_{r_{LM}}} \right), \quad (4.6)$$

⁵Notons que le plan choisi par Schwarzschild est traversée par tous les types d'orbites et donc elle peut être choisi pour tester l'auto-consistance du modèle, sans perdre beaucoup d'information.

où L_L et L_M sont les composantes du moment cinétique parallèles au grand et à l'axe moyen. Une expression similaire peut être formulée pour les applications fréquence correspondant aux orbites “tube de petit axe”, avec un changement des variables approprié. Nous avons réussi de produire des applications fréquence seulement pour des rapports axiaux qui sont très proches du cas sphérique (Figure 4.10). En effet, quand la perturbation augmente, la détermination de la fréquence fondamentale des certaines orbites dévient extrêmement difficile, même dans les variables polaires (nous ne pouvons la retrouver dans les premiers 20 termes de l'approximation quasi-périodique). Malheureusement, il n'y a pas une solution simple pour ce problème. La construction des formes normales numériques, mise à part qu'elle est assez laborieuse, il y a de doute si elle pourrait améliorer la convergence de séries (Section 3.5.3). D'autre part la méthode de moyennisation (voir Section 4.2) a besoin des intégrations numériques assez longues. En outre, la construction des applications fréquence pour les zones de libration n'est pas essentielle pour étudier la dynamique globale du système. Les résonances importantes dans ces régions sont assez limitées (voir Figure 4.10) et occupent une petite fraction de l'espace des phases. De plus, quand la perturbation augmente, les conditions initiales correspondant à des mouvements quasi-périodiques se réduisent, et des régions chaotiques occupent des parties larges de l'espace des phases.

Ce qui semble crucial pour la compréhension de la dynamique des orbites “tube” est de pouvoir distinguer les conditions initiales qui génèrent des orbites quasi-périodiques par ceux qui correspondent à des mouvements chaotiques. Comme nous avons mentionné, dans des études précédentes, ceci étaient tenté à travers le calcul des exposants de Lyapounov [170], [132]. L'analyse en fréquence fournie une solution alternative élégante et beaucoup plus efficace : comme dans le cas des orbites “boîte”, nous pouvons représenter le taux de diffusion sur les plans des conditions initiales pour le même groupe de rapports axiaux du Tableau 4.8. Les paramètres de diffusion pour les orbites “tube” sont calculés à travers la dérivé temporelle des rapports des fréquences d'amplitudes maximales fournies par l'application de l'analyse en fréquence sur chaque orbite pour deux intégrations successives. Nous devons juste souligner que ces rapports ne sont pas les vrais nombres de rotation des orbites “tube”, les coordonnées cartésiennes et leurs moments conjuguées étant résonantes dans ce cas. En dépit de ce fait, l'information en ce qui concerne la stabilité ou non de l'orbite est apparente même dans ces fréquences.

Sur les Figures 4.11 et 4.12, nous présentons les taux de diffusion sur les plans formés par les variables des positions associées au moyen/grand axe et au moyen/petit axe, pour le premier groupe de paramètres de perturbation (Tableau 4.8 - voir aussi Figure 4.3 pour l'espace des conditions initiales des orbites “boîte”). Notons d'abord que, sur la Figure 4.11, la majorité des conditions initiales correspondent à des orbites “tube de grand axe” et quelques orbites “boîte” limitées à la région extrême extérieure, proche des limites de l'espace des phases. La région chaotique principale générée par l'orbite périodique rectiligne de petit axe est apparente dans trois endroits (partie droite, partie gauche supérieure et partie gauche inférieure). L'extension de la zone chaotique pour des valeurs proches du maximum de la variable associée à l'axe moyen est due à l'hyperbolicité partielle de l'orbite périodique rectiligne qui oscille le long de cet axe. De plus, les tores partiellement hyperboliques générés pour des petites perturbations du système plan sur la surface formée par les variables de petit et de grand axe font apparaître la petite zone chaotique, pour des petites valeurs initiales de la variable associée à l'axe moyen. Sur la Figure 4.11a, les traces des quelques lignes résonantes apparaissent au milieu du diagramme. Ces lignes sont symétriques par rapport à la courbe imaginaire correspondant à des valeurs

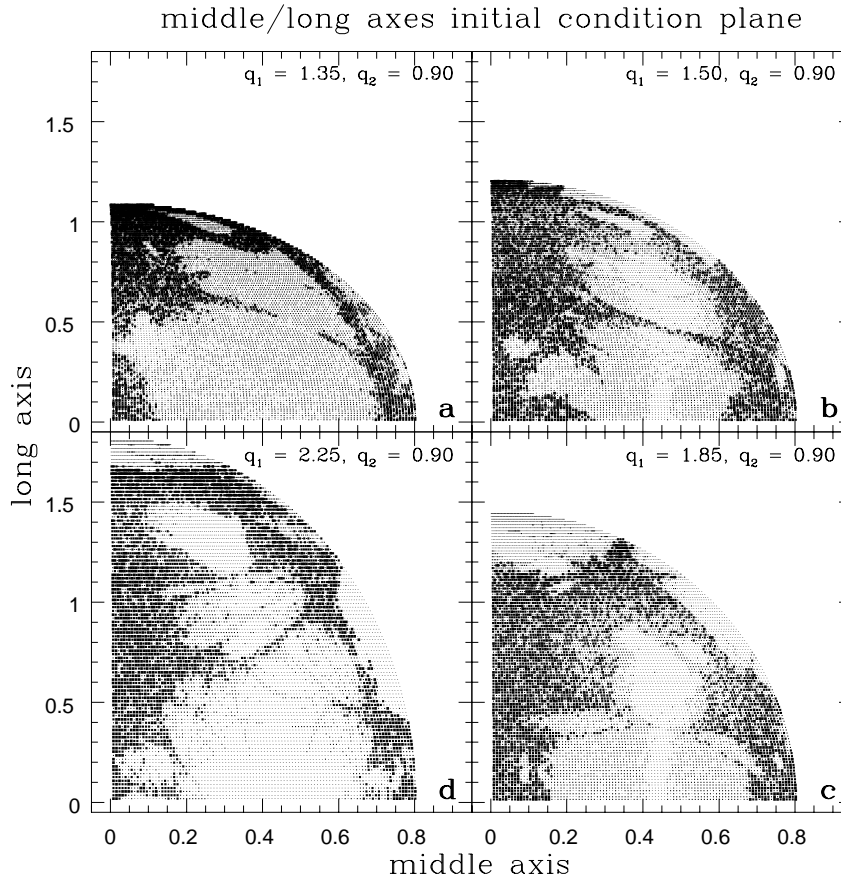


Figure 4.13 : Plans des conditions initiales dans les positions associées à l’axe moyen et au grand axe occupés par les deux familles d’orbites “tube de grand axe” et des orbites “boîte”, pour des valeurs différentes des paramètres de perturbation (a) $q_1 = 1.35$, $q_2 = 0.9$, (b) $q_1 = 1.5$, $q_2 = 0.9$, (c) $q_1 = 1.8$, $q_2 = 0.9$ et (d) $q_1 = 2.25$, $q_2 = 0.9$

maximales du moment cinétique. Dans tous les quatre diagrammes, les variétés perturbées de l’orbite périodique hyperbolique dans la partie supérieure et la partie droite inférieure séparent en deux les conditions initiales qui produisent les orbites “tube intérieur de grand axe”. De plus, ces courbes des conditions initiales, qui correspondent à des orbites irrégulières, séparent les orbites “tube intérieur de grand axe” par les orbites “tube extérieurs de grand axe” et les “boîte”. À part les mouvement fortement chaotiques qui correspondent aux instabilités créées par les orbites périodiques principales, il y a des régions assez grandes où le mouvement n’est ni quasi-périodique ni fortement chaotique, au moins pour les derniers trois cas des rapports axiaux (Figures 4.13b, c et d). Ce dernier fait montre que l’extension des zones chaotiques dans les zones de libration était généralement sous-estimée. Avec l’augmentation de la perturbation, la fraction des orbites qui semblent quasi-périodiques diminue. Sur la dernière figure spécialement (Figure 4.13d), les régions chaotiques s’éteignent jusqu’à la partie du diagramme proche de l’orbite périodique rectiligne de grande axe (pour des valeurs maximales de la variable correspondante) du fait qu’elle devient partiellement hyperbolique pour ces valeurs des paramètres

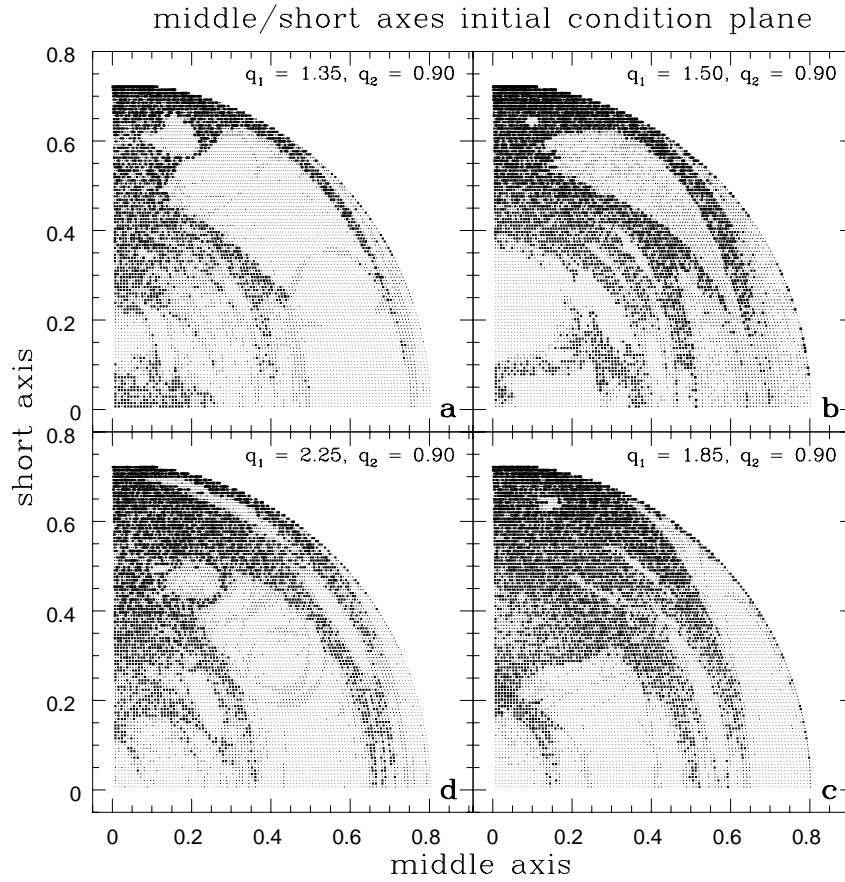


Figure 4.14 : Plans des conditions initiales dans les positions associées à l’axe moyen et au petit axe occupés par les deux familles d’orbites “tube de grand axe” et des orbites “boîte”, pour des valeurs différentes des paramètres de perturbation (a) $q_1 = 1.35$, $q_2 = 0.9$, (b) $q_1 = 1.5$, $q_2 = 0.9$, (c) $q_1 = 1.8$, $q_2 = 0.9$ et (d) $q_1 = 2.25$, $q_2 = 0.9$

de perturbation. Ce comportement est assez différent de ce que nous avons remarqué pour les orbites “boucle” du système plan, où les régions chaotiques étaient limitées au voisinage de l’orbite périodique instable de petit axe (Section 3.7).

Sur la Figure 4.12, la majorité des orbites sont des orbites “tube de petit axe”, en dehors de la zone proche de l’orbite rectiligne de grand axe (pour des petites valeurs des variables associées au grand axe et à l’axe moyen). Les orbites “boîte” sont toujours séparées par les orbites “tube de petit axe” suivant une courbe des conditions initiales correspondant à des orbites chaotiques correspondant aux variétés perturbées de l’orbite périodique de petit axe. En sus de la zone correspondant à la perturbation des tores partiellement hyperboliques du système plan formé par les variables associées au petit et au grand axe, les régions chaotiques générées par l’orbite périodique de petit axe sont étendues le long du petit axe (pour des petites valeurs de la variable de l’axe moyen). Sur ces figures (spécialement sur la Figure 4.12a) nous pouvons apercevoir plusieurs lignes correspondant à des résonances qui semblent être originaires de la zone chaotique au voisinage de l’orbite périodique de petit axe. Elles présentent une certaine

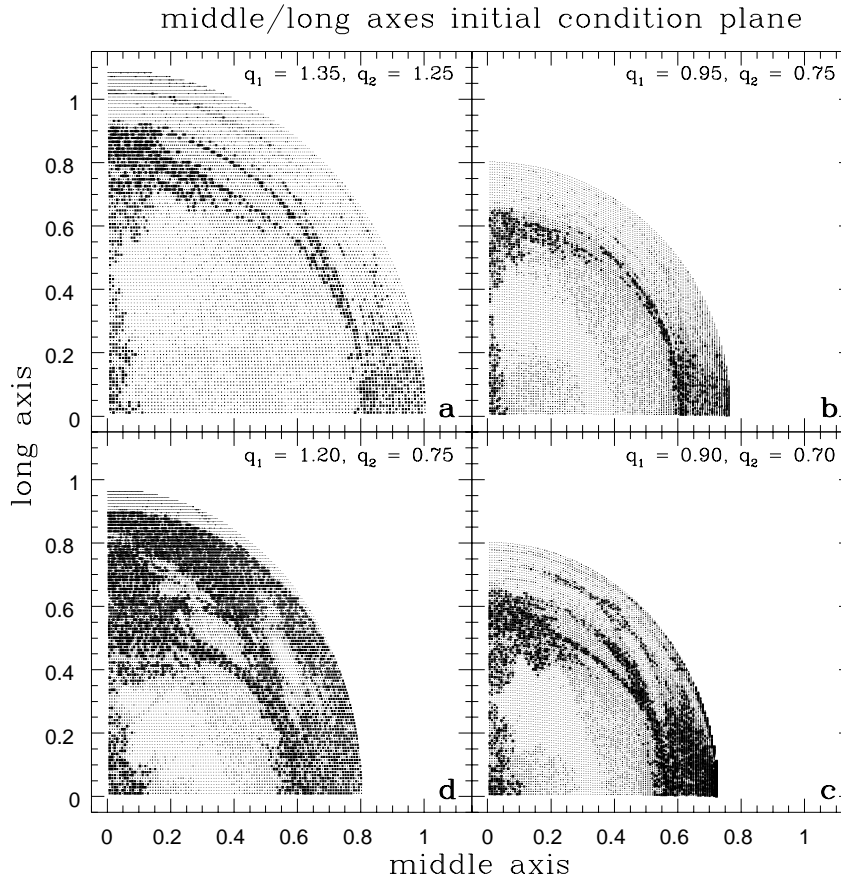


Figure 4.15 : Plans des conditions initiales dans les positions associées à l'axe moyen et au grand axe occupés par les deux familles d'orbites “tube de grand axe” et des orbites “boîte”, pour des valeurs différentes des paramètres de perturbation (a) $q_1 = 1.35$, $q_2 = 1.25$, (b) $q_1 = 0.95$, $q_2 = 0.75$, (c) $q_1 = 0.9$, $q_2 = 0.7$ et (d) $q_1 = 1.2$, $q_2 = 0.75$

symétrie car, comme nous avons mentionné ci-dessus, des valeurs égales du moment cinétique initial produisent les mêmes orbites dans deux endroits différents des plans des conditions initiales. D'autre part, l'amplification de la perturbation augmente la proportion des conditions initiales correspondant à des orbites chaotiques. En outre, à cause du changement des rapports axiaux, les “boîte” occupent une région plus grande. Comme auparavant, pour $q_1 = 1.25$ et $q_2 = 0.9$, (Figure 4.13d), nous pouvons discerner la petite zone chaotique créée au voisinage de l'orbite périodique de grand axe, à cause de son hyperbolicité partielle.

Sur les Figures 4.13 et 4.14 nous présentons les plans des conditions initiales pour le deuxième groupe de rapports axiaux. Dans ces cas, la plupart des conditions initiales conduisent à des mouvements chaotiques. Ce dernier fait est en accord avec le comportement des orbites “boîte” dans les espaces des conditions initiales correspondants (Figure 4.5). Pour les rapports axiaux $q_1 = 1.50$ et $q_2 = 0.90$ (Figures 4.13c, 4.14c) où toutes les orbites périodiques rectilignes sont hyperboliques, nous remarquons une très grande proportion des conditions initiales qui correspondent à des mouvements chaotiques. Sur les figures représentant les plans des conditions

initiales des variables de position associées à l'axe moyen et au grand axe, nous pouvons remarquer une région au milieu des applications qui semble plus régulière et sépare les orbites “tube intérieur de grand axe” par les deux autres types d'orbites. D'autre part, les régions qui correspondent aux orbites “tube de petit axe” sont diminuées à cause du changement des rapports axiaux. En effet, dans le dernier diagramme, pour $q_1 = 2.25$ et $q_2 = 0.9$, les orbites “tube de petit axe” représentent une petite fraction des conditions initiales, proches des valeurs maximales de la variables de position associée à l'axe moyen.

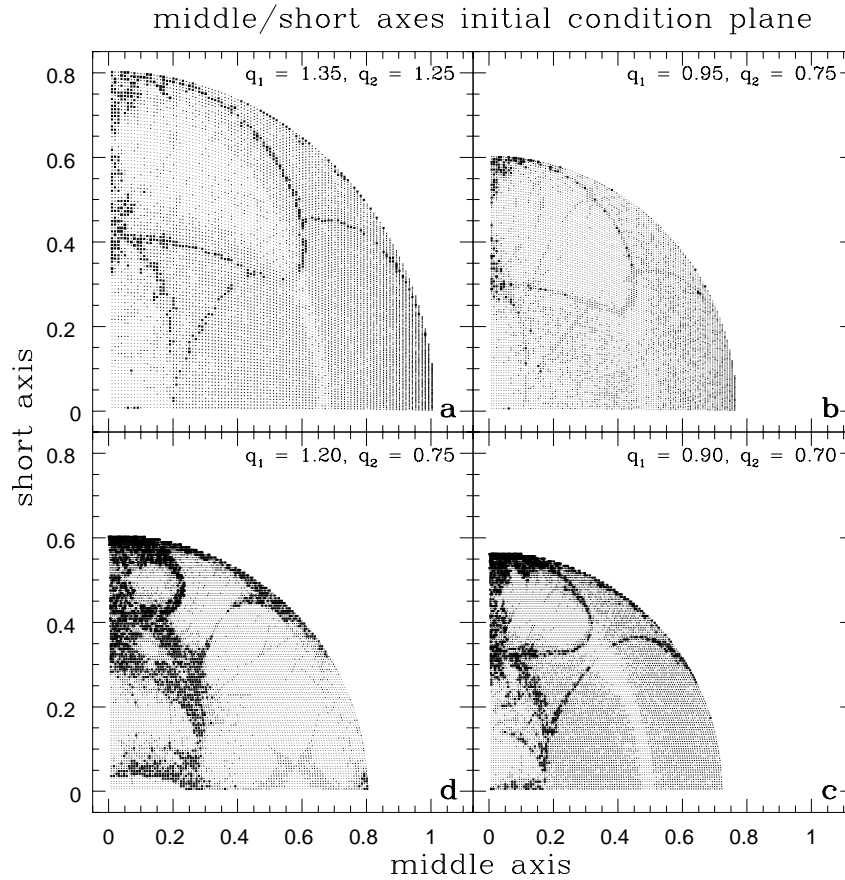


Figure 4.16 : Plans des conditions initiales dans les positions associées à l'axe moyen et au petit axe occupés par les deux familles d'orbites “tube de grand axe” et des orbites “boîte”, pour des valeurs différentes des paramètres de perturbation (a) $q_1 = 1.35, q_2 = 1.25$, (b) $q_1 = 0.95, q_2 = 0.75$, (c) $q_1 = 0.9, q_2 = 0.7$ et (d) $q_1 = 1.2, q_2 = 0.75$

Finalement, les plans des conditions initiales représentés sur les Figures 4.15 et 4.16 correspondent au dernier groupe de paramètres de perturbation. Comme dans le premier groupe de rapport axiaux (Figures 4.11 et 4.14), les régions chaotiques sont concentrées proches des orbites instables, pour des petites perturbations et sont amplifiées considérablement dans le dernier diagramme, pour $q_1 = 1.20$ et $q_2 = 0.75$, au moins dans le cas des orbites “tube de grand axe” (Figure 4.15d). Les plans des conditions initiales occupés par des orbites “tube de petit axe” et quelques orbites “boîte” semblent plus régulières. Un aspect très intéressant

est l'apparition des traces des lignes résonantes qui forment un certain triangle dans la partie inférieure des diagrammes. Pour le dernier couple de paramètres de perturbation (Figure 4.16d), ces lignes se recouvrent avec la région chaotique principale générée par l'orbite hyperbolique de petit axe. Dans ce dernier diagramme, nous pouvons aussi remarquer quelques lignes résonantes provenant de l'orbite périodique de l'axe moyen qui est partialement hyperbolique, pour les rapports axiaux correspondants.

Conclusion

Plusieurs études avaient déjà tenté d’éclairer le comportement dynamique des modèles galactiques triaxiaux. Néanmoins, comme on ne disposait pas d’un outil adéquat pour la visualisation de l’espace des phases des systèmes à 3 degrés de liberté, notre connaissance était émaillée des nombreuses lacunes. L’analyse en fréquence basée sur le formalisme hamiltonien approprié crée des nouvelles perspectives pour la clarification de ces problèmes. Dans ce travail nous avons poursuivi deux objectifs. D’abord, nous visons à établir le lien entre des idées modernes de la théorie des systèmes dynamiques et la dynamique galactique. Le deuxième but était de fournir une image détaillée d’un potentiel galactique bien connu afin de construire une base solide pour aborder certains problèmes théoriques, qui sont latents depuis des années, comme l’auto-consistance des modèles employés et le rôle joué par les orbites chaotiques.

Notre étude a porté sur l’interprétation de la dynamique du potentiel logarithmique, un membre spécial de la famille des galaxies à loi de puissance [68]. Ces modèles présentent des caractéristiques physiques et des propriétés observables communes [69]. De plus, certaines particularités dynamiques de ces modèles, comme les symétries de l’espace des phases, les points fixes, les orbites périodiques principales et les cas intégrables, sont identiques. Nous pouvons alors conjecturer que, pour des raisons topologiques liées à la forme des surfaces équipotentiellles, la plupart des aspects dynamiques d’un membre de ce famille sont génériques pour tous les autres potentiels à loi de puissance, avec un ajustement approprié des paramètres en jeu (voir aussi [61]). Ces caractéristiques dynamiques exposées dans la Section 2.3 sont déterminantes pour la dynamique du potentiel modèle.

Avant d’aborder le problème triaxial, il nous semblait fondamental d’étudier d’abord le cas plan du potentiel logarithmique. Nous avons conçu cette première approche comme une étude de faisabilité pour l’application de la méthode en dynamique galactique. En outre, nous voulions explorer la possibilité de trouver des variables plus adéquates pour l’étude de la dynamique du système.

Le hamiltonien du système logarithmique plan ne peut pas être exprimé d’une manière évidente comme une perturbation d’un hamiltonien intégrable, mais son espace des phases peut être séparé dans deux régions correspondant aux orbites “boîte” (circulation) et “boucle” (libration), respectivement. Nous avons établi alors les liens entre les perturbations des cas intégrables du système (modèles rectilignes et central) avec ces deux types d’orbites (Section 3). Suivant la méthode d’Henrard [88], nous avons construit numériquement, pour chaque type de mouvement, une transformation de l’espace des phases en variables action-angle associées aux hamiltoniens intégrables correspondants. Alors, nous avons montré numériquement que la fréquence obtenue par l’analyse en fréquence coïncide avec la fréquence des tores KAM conjugués, ce qui était ensuite prouvé rigoureusement par Laskar [110]. En effet, pour chaque condition initiale, la série quasi-périodique peut être considérée comme une paramétrisation

précise du mouvement sur les tores voisins (Section 3.5). Chose étonnante, les variables action-angle n'ont pas beaucoup amélioré la précision sur la détermination des fréquences fondamentales. De plus, la perturbation étant augmentée (Figure 3.8), elles perdent leurs avantages initiaux. C'est pourquoi que nous avons décidé d'appliquer l'analyse en fréquence sur les variables originales (x, X, y, Y) pour étudier les orbites “boîte” et faire une transformation simple en coordonnées polaires (r, R, θ, Θ) , dans le cas des orbites “boucle”. Ceci met en évidence un avantage supplémentaire de l'analyse en fréquence qui peut être souvent utilisée comme une “boîte noire” pour des systèmes dynamiques assez variés, contrairement à la recherche des variables action-angle adaptées. En effet, les fréquences obtenues par l'analyse en fréquence peuvent être considérées comme des intégrales numériques de chaque orbite quasi-périodique.

Après avoir démontré la fiabilité de la méthode, nous avons construit et analysé les applications fréquence du problème plan (équations (3.54) et (3.55)). Ainsi, nous avons étudié globalement le comportement dynamique du problème, représentant les régions régulières et chaotiques et leur évolution par rapport au paramètre de perturbation q (Figures 3.11, 3.12, 3.14, 3.15 et 3.18). Toutes les résonances importantes sont visualisées avec leur taille correspondante sur une simple représentation à 1 dimension. Nous devons aussi noter que l'analyse en fréquence peut fournir des informations sur le comportement des orbites pour des temps beaucoup plus courts par rapport aux approches classiques. Alors tous nos résultats étaient calculés pour des temps physiques correspondant à 100 périodes orbitales. Dès que les résonances sont identifiées, les orbites périodiques correspondantes peuvent être facilement calculées (Figure 3.19). La possibilité d'obtenir toutes les orbites périodiques est intéressante pour la construction des distributions de densité dans des problèmes axisymétriques, suivant la méthode de Contopoulos et Grøsbol [42], [43].

L'étude du système plan était un premier pas pour la clarification de la dynamique complexe du système logarithmique triaxial. En effet, dans ce cas, l'espace orbitale du système contient 4 catégories principales d'orbites : les 3 types des “tube” et les orbites “boîte”. Comme pour le problème plan, la décomposition quasi-périodique des orbites, nous a permis d'élucider la connexion de chaque type d'orbite avec des perturbations des cas intégrables (Section 4.2). Afin d'avoir une image globale du comportement dynamique du système nous avons construit des applications fréquence pour un grand nombre de rapports axiaux (Section 4.3). L'utilisation des rapports axiaux comme des paramètres de perturbation est dictée par des arguments dynamiques et physiques. En outre, nous ne perdons pas d'information en fixant l'énergie à une valeur constante, comme nous pouvons avoir un comportement dynamique similaire pour n'importe quel niveau d'énergie, avec un réarrangement convenable des rapports axiaux.

Les applications fréquence pour la région de circulation de l'espace des phases (orbites “boîte”) ont révélé les zones chaotiques importantes créées par les intersections homoclines des variétés perturbées des orbites périodiques principales et spécialement de l'orbite périodique rectiligne qui oscille le long du petit axe de l'espace de configuration. Même si l'instabilité de cette orbite étaient connue depuis longtemps [14], son influence dynamique n'était jamais discutée dans le cadre des systèmes dynamiques modernes et son ampleur était sous-estimée. Plusieurs instabilités étant introduites à cause de l'addition de la troisième dimension, les régions chaotiques sont très apparentes même pour des systèmes proches des cas axisymétriques. Il faut souligner que l'intégration numérique assure une distinction précise entre les mouvements réguliers et les mouvements chaotiques, ce qui n'était pas le cas dans les études précédentes. De plus, les applications fréquence représentent l'espace naturel pour la visualisation des phénomènes dynamiques associés à des systèmes multidimensionnels .

En effet, l'espace des phases du système est beaucoup plus compliqué de ce qu'il était prédit dans des études antérieures, qui ont mis en évidence seulement l'existence des quelques orbites périodiques (des points de l'espace des fréquences correspondant à des résonances). Cependant, l'existence des résonances plus compliquées entre les fréquences fondamentales du mouvement était complètement négligée. Ces dernières forment un réseau compliqué des lignes sur les applications fréquence, le réseau d'Arnold du système. Les lignes résonantes peuvent être conçues comme la généralisation des îles de libration du système plan étant perturbées par l'addition de la troisième dimension asymétrique. Ces lignes résonantes, qui correspondent à des tores de dimension non-maximale, sont les familles d'orbites principales qui influencent le comportement dynamique du système. Toutes les orbites périodiques importantes sont définies par les intersections des ces lignes. Alors, il est assez facile de définir leurs positions exactes, comme nous avons une très bonne approximation par l'analyse en fréquence, ce qui améliore la convergence de n'importe quelle méthode numérique.

Par la suite, nous avons étudié l'évolution dynamique du système par rapport à la variation des paramètres de perturbation. Quand la perturbation est amplifiée la zone d'instabilité principale est augmentée et elle se recouvre avec les lignes résonantes voisines, ainsi produisant des larges zones chaotiques. En représentant chaque point de l'espace des conditions initiales avec un certain paramètre de diffusion, toutes les propriétés dynamiques du système examinées sur les applications fréquence ont été directement liées à l'espace physique. Nous avons remarqué alors que les orbites chaotiques sont concentrées à proximité du système plan formé par les variables associées à l'axe moyen et au grand axe, du moins pour des valeurs modérées des paramètres de perturbation. Quand la perturbation augmente, les orbites chaotiques se répandent dans toute la région de circulation de l'espace des phases.

Dans le cas des orbites "tube", il est assez difficile de construire des applications fréquence du fait de la paramétrisation inopportune de cette partie de l'espace des phases par les coordonnées cartésiennes et ces moments conjugués. Nous avons étudié alors la dynamique de ces zones à travers les plans des conditions initiales. Ainsi, nous avons révélé les zones chaotiques importantes, qui séparent les différents types d'orbites et couvrent une région assez grande de cette partie de l'espace des phases.

Ces résultats confirment que le chaos doit être intrinsèquement connecté avec l'addition d'une troisième dimension asymétrique dans un système bidimensionnel qui n'est pas intégrable. A part les systèmes intégrables du type Stäckel et ces perturbations, nous pouvons déduire que l'existence d'un grand nombre d'orbites chaotiques doit être une caractéristique générique de la dynamique des systèmes galactiques triaxiaux, non seulement pour des potentiels avec des singularités [79], [132], mais aussi des modèles avec un noyau central d'une densité constante. Un aspect dynamique peu étudié jusqu'à nos jours est l'effet de l'inclusion d'une faible rotation dans le hamiltonien des systèmes triaxiaux, qui semble plausible pour certaines galaxies elliptiques. Dans ce cas, des symétries par réflexion du système sont cassées ce qui entraîne sûrement un élargissement des zones chaotiques.

Nos résultats, ainsi que d'autres études récentes [132], suggèrent que l'incorporation des orbites chaotiques dans nos modèles doit être une nécessité pour la construction d'une fonction de distribution de l'espace des phases. Cette inclusion ne viole pas le fait que chaque solution stationnaire de l'équation de Vlassov doit dépendre des intégrales du mouvement (voir Section 1.1.1). Même si Binney a utilisé le dernier argument pour démontrer l'incompatibilité du chaos dans le système stellaires [16], il semble évident que tout système hamiltonien (régulier ou pas) respecte aux moins une intégrale du mouvement, l'énergie. Alors on pourrait considérer une

fonction de distribution séparée en deux parties : l'une correspondant aux orbites régulières qui dépend des intégrales du mouvement et une deuxième pour les orbites chaotiques qui dépend seulement de l'énergie (pour une discussion voir [132] et [133]).

En effet, l'inclusion des orbites chaotiques dans nos modèles semble plutôt un problème technique : nous ne connaissons pas de méthode de calcul des densités spatiales moyennes associées à ces orbites (voir [152], [133] pour des essais). Selon leur taux de diffusion les orbites irrégulières peuvent se distinguer en faiblement et fortement chaotique.⁶ Une première approximation est de considérer les orbites fortement chaotiques comme ergodiques et les faiblement chaotiques comme régulières [132]. Pour être assurés du comportement de chaque orbite nous devons d'abord étudier en détails le mécanisme de diffusion dans l'espace des phases du système. En effet, nous avons déjà remarqué qu'en dépit du fait que quelques orbites sont fortement chaotiques, elles sont piégées pour des temps assez longs au voisinage des orbites périodiques ou des tores résonants (Section 4.3.2).

Un deuxième problème apparaît quand on essaie de construire numériquement des solutions auto-consistantes en utilisant la méthode classique de Schwarzschild [168] ou ses versions variées (voir [22] et [179] pour une revue). Un inconvénient sérieux de la méthode remarquée par Kuijken [103] est que les solutions fournies peuvent être instables quand il y a un changement de la partition de l'espace initialement considérée. Ce problème doit être attribué au fait que la partition est construite dans les mauvaises variables et chaque élément ne correspond pas à des volumes égaux des tores. Mise à part du fait que l'application fréquence peut être un outil très efficace pour la visualisation de l'organisation des orbites dans l'espace des phases, nous pouvons aussi calculer à travers les approximations quasi-périodiques des variables d'actions numériques qui pourraient nous aider considérablement à la construction de la partition et au calcul d'une distribution de densité.

Finalement, l'hypothèse de triaxialité ayant été récemment remise en cause par Merritt [130], on peut se demander dans quelles mesures nos modèles engendrant des régions chaotiques importantes sont réalistes. La réponse est difficile et reste controversé. Elle présuppose une connaissance parfaite des caractéristiques physiques du système, connaissance qui est assez limitée dans le cas des galaxies. Il faut aussi souligner que les approches orbitales présentent certaines limites. Par exemple, elles ne peuvent pas tenir compte de la nature statistique des systèmes galactiques (ce qui est fait dans les approches N -corps). En outre, en considérant que le problème est hamiltonien, nos études négligent plusieurs processus dissipatifs (la formation des étoiles et l'influence du gaz ou même les rencontres proches dans les centres des galaxies) qui peuvent jouer un rôle déterminant à l'évolution des galaxies. Une idée intéressante est l'inclusion des forces stochastiques (aléatoires) dans les équations du mouvement du système (voir par exemple [133]). Ainsi, on pourrait non seulement inclure la dissipation dans nos modèles, mais aussi essayer d'ajouter dans le système un paramètre d'incertitude, venant de notre peu de connaissance de la physique des galaxies (Pfenniger, communication privée). Dans le futur, l'évolution des techniques d'observation ainsi que des efforts théoriques sont susceptibles de fournir un nouvel éclairage dans ces problèmes stimulants.

⁶La qualification commune de ces orbites en stochastiques et semi-stochastiques dans un grand nombre d'études de la dynamique galactique [81], [132], [133] est trompeuse parce que la stochasticité sous-entend un comportement markovien (aléatoire), ce qui n'est pas vrai comme nous avons remarqué.

Références Bibliographiques

- [1] Aarseth, S. (1994), Direct Methods for N-Body Simulations, in EADN Summer School on *Galactic Dynamics and N-Body Simulations*, LNP 433, eds. G. Contopoulos, N. K. Spyrou and L. Vlahos, Springer-Verlag, 277-312
- [2] Arnol'd, V.I. (1963), On a theorem of Liouville concerning integrable problems of dynamics, *Sib. Mathem. Zh.*, **4**, 2
- [3] Arnol'd, V.I. (1963), Proof of A.N. Kolmogorov's theorem on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbation in the Hamiltonian, *Russ. Math. Surveys*, **18**, 9-36
- [4] Arnol'd, V.I. (1963), Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, *Russ. Math. Surveys*, **18**, 85-191
- [5] Arnol'd, V.I. (1964), Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, *Sov. Math. Dokl.*, **5**, 581-585
- [6] Arnol'd, V.I. and Avez, A. (1967), *Problèmes Ergodiques de la Mécanique Classique*, Gauthier-Villars, Paris
- [7] Arnol'd, V.I. (1976), *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*, Eds. Mir, Paris
- [8] Arnol'd, V.I., Kozlov, V.V. and Neishtadt, A.I (1988), Mathematical aspects of Classical and Celestial Mechanics, in *Dynamical Systems III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 3, ed. V.I. Arnol'd, Springer-Verlag
- [9] Athanassoula, E., Bienaymé, O., Martinet, L. and Pfenniger, D. (1983), Orbits as building blocks of a barred galaxy model, *A&A*, **127**, 349-360
- [10] Avez, A. (1983), *Calcul Différentiel*, Coll. maîtrise mathématiques pures, Masson, Paris
- [11] Bingelli, B. (1980), On the intrinsic shape of elliptical galaxies, *A&A*, **82**, 289-294
- [12] Binney, J. (1976), Is the flattening of elliptical galaxies necessarily due to rotation ?, *MNRAS*, **177**, 19-29
- [13] Binney, J. (1978), On the rotation of elliptical galaxies, *MNRAS*, **183**, 501-514
- [14] Binney, J. (1981), Resonant excitation of motion perpendicular to the galactic plane, *MNRAS*, **196**, 455-467

- [15] Binney, J. (1982), Dynamics of elliptical galaxies and other spheroidal components, *ARA&A*, **20**, 399-429
- [16] Binney, J. (1982), Regular and irregular orbits in galactic bars, *MNRAS*, **201**, 1-14
- [17] Binney, J. (1982), Does Jeans' theorem apply only to spherical systems ?, *MNRAS*, **201**, 15-19
- [18] Binney, J. (1985), Testing for triaxiality with kinematic data, *MNRAS*, **212**, 767-781
- [19] Binney, J. and Kummar, S. (1993), Angle variables for numerically fitted orbital tori, *MNRAS*, **261**, 584-592
- [20] Binney, J. and Spergel, D. (1982), Spectral Stellar Dynamics, *ApJ*, **252**, 308-321
- [21] Binney, J. and Spergel, D. (1984), Spectral Stellar Dynamics II. The action integrals, *MNRAS*, **206**, 159-177
- [22] Binney, J. and Tremaine, S. (1987), *Galactic Dynamics*, Princeton Univ. Press, Princeton N.J.
- [23] Birkhoff, G.D. (1927), *Dynamical Systems*, New York
- [24] Boltzmann, L. (1872), Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas-molekülen, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Wien*, **66**, 275-370, english translation by S. Brush in Kinetic Theory, Pergamon, (1964)
- [25] Boltzmann, L. (1896), *Vorlesungen über Gastheorie*, J.A. Barth, Leipsig, english translation by S. Brush in Lectures on Gas Theory, Un. of California press, Berkeley 1964
- [26] Broucke, G.D. (1969), Stability of periodic orbits in the elliptic restricted three body problem, *AIAA J.*, **7**, 1003-1009
- [27] Cartan, H. (1978), *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Nouveau tirage, Enseignement des sciences, Hermann, Paris
- [28] Cartan, H. (1990), *Cours de calcul différentiel*, 4ème tirage, Collections méthodes, Hermann, Paris
- [29] Chirikov, B.V. (1960), Resonance processes in magnetic traps, *Plas. Phys. - J. Nucl. En. C*, **1**, 253-260
- [30] Chirikov, B.V. (1979), A universal instability of many dimensional oscillator systems, *Phys. Rep.*, **52**, 263-379
- [31] Combes, F., Boissé, P., Mazure, P. et Blanchard, A. (1991), *Galaxies et Cosmologie*, InterEditions/Editions du CNRS
- [32] Contopoulos, G. (1956), *Zs. Ap.*, **39**, 126-132
- [33] Contopoulos, G. (1960), A third integral of motion in the Galaxy, *Zs. Ap.*, **49**, 273-291
- [34] Contopoulos, G. (1963), On the existence of a third integral of motion, *AJ*, **68**, 1-14

- [35] Contopoulos, G. (1963), Resonance case and small divisors in a third integral of motion, *AJ*, **68**, 763-779
- [36] Contopoulos, G. (1967), Resonance phenomena and the non-applicability of the “third” integral, *Bull. Astron.*, 3e Ser., **2** (1), 223-241
- [37] Contopoulos, G. (1971), Orbits in highly perturbed dynamical systems. III. Nonperiodic orbits, *AJ*, **76**, 147-156
- [38] Contopoulos, G. (1981), The effect of resonances near corotation in barred galaxies, *A&A*, **102**, 265-278
- [39] Contopoulos, G. (1983), Ordered and ergodic motions of stars in galaxies, *A&A*, **117**, 89-108
- [40] Contopoulos, G. (1994), Order and Chaos, in EADN Summer School on *Galactic Dynamics and N-Body Simulations*, LNP 433, eds. G. Contopoulos, N. K. Spyrou and L. Vlahos, Springer-Verlag, 33-100
- [41] Contopoulos, G., Gottesman, S.T., Hunter, J.H. and England M.N. (1989), Comparison of stellar and gasdynamics of a barred galaxy, *ApJ*, **343**, 608-616
- [42] Contopoulos, G. and Grøsbol, P. (1986), Stellar dynamics of spiral galaxies: nonlinear effects at the 4/1 resonance, *A&A*, **155**, 11-23
- [43] Contopoulos, G. and Grøsbol, P. (1988), Stellar dynamics of spiral galaxies: self-consistent models, *A&A*, **197**, 83-90
- [44] Contopoulos, G. and Grøsbol, P. (1989), Orbits in barred galaxies, *A&A Rev.*, **1**, No 3-4, 261-289
- [45] Contopoulos, G. and Magnenat, P. (1985), Simple three-dimensional periodic orbits in a galactic-type potential, *Celest. Mech.*, **37**, 387
- [46] Contopoulos, G. and Papayannopoulos, T. (1980), Orbits in weak and strong bars, *A&A*, **92**, 33-46
- [47] Contopoulos, G. and Seimenis, J. (1990), Application of the Prendergast method to a logarithmic potential, *A&A*, **227**, 49-53
- [48] Cornfeld, I.P., Sinai, Y.G. and Vershik, A.M. (1989), in *Dynamical Systems II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 2, ed. Y.G. Sinai, Springer-Verlag
- [49] Crane, P., Stiavelli, M., King, I.R., Deharveng, J.M., Albrecht, R., Barbieri, C., Blades, J.C., Boksenberg, A., Disney, M.J. and Jakobsen, P. (1993), High resolution imaging of galaxy cores, *AJ*, **106** 1371-1393
- [50] Cresson, J. (1997), Doctorat de 3ème cycle, Un. Paris VI
- [51] Dehnen, W. (1993), A family of potential-density pairs for spherical galaxies and bulges, *MNRAS*, **265**, 250-256

- [52] Dehnen, W. (1995), Modelling galaxies with $f(E, L_z)$: a black hole in M32, *MNRAS*, **279**, 919-932
- [53] Dejonge, H. (1986), Stellar dynamics and the description of stellar systems, *Phys. Rep.*, **133**, 217-313
- [54] Devaney, R.L. (1981), Singularities in classical mechanical systems, in *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Birkhauser, Boston, 211-333
- [55] De Vaucouleurs, G. (1948), *Ann. d'Astrop.* **11**, 247
- [56] de Zeeuw, P.T. (1985), Elliptical galaxies with separable potentials, *MNRAS*, **216**, 273-334
- [57] de Zeeuw, P.T. (1996), Dynamics of triaxial galaxies, in Proc. of the 36th Herstmonceux Conference, in honor of Donald Lynden-Bell on *Gravitational Dynamics*, eds O. Lahav, E. Terlevich, and R. Terlevich, Cambridge University Press (in press)
- [58] de Zeeuw, P.T., Evans, N. W. and Schwarzschild, M. (1996), Jeans and Boltzmann solutions for oblate galaxies with flat rotation curves, *MNRAS*, **280**, 903-918
- [59] de Zeeuw, P.T. and Franx, M. (1991), Structure and dynamics of elliptical galaxies, *ARA&A*, **29**, 239-274
- [60] de Zeeuw, P.T. and Lynden-Bell, D. (1985), Best approximate quadratic integrals in stellar systems, *MNRAS*, **215**, 713-730
- [61] de Zeeuw, P.T. and Pfenniger D. (1988), Potential-density pairs for galaxies, *MNRAS*, **235**, 949-995
- [62] Dumas, H.S and Laskar, J. (1993), Global dynamics and long time stability in Hamiltonian systems via numerical frequency analysis, *Phys. Rev. Let.*, **70**, 2975-2979
- [63] Dyson, F.J. (1962), Statistical theory of the energy levels of Complex Systems. I, *J. Math. Phys*, **3**, 140-156
- [64] Dyson, F.J. (1962), Statistical theory of the energy levels of Complex Systems. II, *J. Math. Phys*, **3**, 157-165
- [65] Dyson, F.J. (1962), Statistical theory of the energy levels of Complex Systems. III, *J. Math. Phys*, **3**, 166-175
- [66] Eddington, A.S. (1915), The Dynamics of a Stellar System III: Oblate and other Distributions, *MNRAS*, **76**, 37-60
- [67] Evans, N. W. (1993), Simple galaxy models with massive haloes, *MNRAS*, **260**, 191-201
- [68] Evans, N. W. (1994), The power law galaxies, *MNRAS*, **267**, 333-360
- [69] Evans, N. W. and de Zeeuw, P.T. (1994), Observable properties of the power law galaxies, *MNRAS*, **267**, 333-360

- [70] Floquet, G. (1883), Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, *Ann. Scien. Ec. Norm. Sup.*, Ser. 2, **13**, 47
- [71] Ferrarese, L., van der Bosch, F.C., Jaffe, W., Ford, H.D. and O'Connell, R.W. (1994), Hubble Space Telescope photometry of the central regions of virgo cluster elliptical galaxies. III. Brightness profiles, *AJ*, **108**, 1598-1609
- [72] Forbes, D.A., Franx, M. and Illingworth, G.D. (1995), Ellipticals with Kinematically Distinct Cores: WFPC1 Imaging of Nearby Ellipticals, *AJ*, **109**, 1988-202
- [73] Franx, M., Illingworth, G.D. and de Zeeuw, T.W. (1991), The ordered nature of elliptical galaxies - Implications for their intrinsic angular momenta and shapes, *ApJ*, **383**, 112-134
- [74] Gebhardt, K., Richstone, D., Ajhar, E., Lauer, T., Byun, Y.I., Kormendy, J., Dressler, A., Faber, S., Grillmair, C. and Tremaine, S. (1996), The Centers of Early-Type Galaxies with HST III: Non-Parametric Recovery of Stellar Luminosity Distributions, (preprint)
- [75] Gerhard, O.E. (1985), Stochastic stellar orbits in perturbed integrable potentials, *A&A*, **151**, 279-296
- [76] Gerhard, O.E. (1986), Stochastic stellar orbits in galaxies - II. Melnikov's method in $n \geq 3$ dimensions, *MNRAS*, **222**, 287-297
- [77] Gerhard, O.E. (1994), Elliptical Galaxies, in EADN Summer School on *Galactic Dynamics and N-Body Simulations*, LNP 433, eds. G. Contopoulos, N. K. Spyrou and L. Vlahos, Springer-Verlag, 191-274
- [78] Gerhard, O.E. (1995), in *The Nuclei of Normal Galaxies: Lessons from the galactic center* eds. R. Genzel, A. Harris, Kluwer, Dordrecht
- [79] Gerhard, O.E. and Binney, J. (1985), Triaxial galaxies containing massive black holes or central density cusps, *MNRAS*, **216**, 467-502
- [80] Goldstein, H. (1980), *Classical Mechanics*, 2nd eds. Reading, Penn., Addison-Wesley
- [81] Goodman, J. and Schwarzschild, M. (1981), Semistochastic orbits in a triaxial potential, *ApJ*, **245**, 1087-1093
- [82] Gutzwiller, M.C. (1990), *Chaos in classical and quantum mechanics*, IAM 1, Springer-Verlag
- [83] Hairer, E., Nørsett, S.P. and Wanner, G. (1987), *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag
- [84] Hardy, G.H. and Wright, E.M. (1975), *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Un. Press, London
- [85] Hénon, M. (1965), Exploration numérique du problème restreint : II. Masses égales, stabilité des orbites périodiques, *Ann. d'Astrophys.*, **28**, 992-1007
- [86] Hénon, M. (1982), On the numerical computation of Poincaré maps, *Physica D*, **5**, 412-414

- [87] Hénon, M. and Heiles, C. (1965), The applicability of the third integral of motion : some numerical experiments, *Astron. J.* **69**, 73-79
- [88] Henrard, J. (1990), A semi-numerical perturbation method for separable Hamiltonian systems, *Celest. Mech.*, **49**, 43-67
- [89] Howard, J.E. and MacKay, R.S. (1987), Linear Stability of Symplectic Maps, *J. Math. Phys.*, **28**, 1036-1051
- [90] Hubble, E. P. (1930), Distribution of Luminosity in Elliptical Nebulae, *ApJ*, **71**, 231-276
- [91] Hunter, C. and de Zeeuw, P.T. (1992), Triaxial galaxy models with thin tube orbits, *ApJ*, **389**, 79-117
- [92] Hunter, C. and Qian, E. (1993), Two-integral distribution functions for axisymmetric galaxies, *MNRAS*, **262**, 401-428
- [93] Jeans, J.H. (1915), On the theory of star-streaming and the structure of the Universe, *MNRAS*, **76**, 70-84
- [94] Kaasaleinen, M. (1994), Hamiltonian perturbation theory for numerically constructed phase-space tori, *MNRAS*, **268**, 1041-1050
- [95] Kaasalainen, M. and Binney, J. (1994), Torus construction for potentials supporting different orbit families, *MNRAS*, **268**, 1033-1040
- [96] Karney, C.F.F. (1983), Long-time correlations in the stochastic regime, *Physica D*, **8**, 360-380
- [97] Kaufmann, D.E. (1993), *Self-consistent Models of Barred Spiral Galaxies*, PhD Thesis, Un. of Florida
- [98] Kaufmann, D.E. and Contopoulos, G. (1996), Self-consistent models of barred spiral galaxies, *A&A*, **309**, 381-402
- [99] Kolmogorov, A.N. (1954), Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamiltonian function *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **98**, 527-530 (in russian); english translation in Stochastic behaviour in classic and quantum Hamiltonian systems, Lecture notes in Physics 93, eds. Casati, G. and Ford, J.
- [100] Kormendy, J. (1985), Brightness profiles of the cores of bulges and elliptical galaxies, *ApJL*, **292**, L9-L13
- [101] Krein, M.G. (1950), *Dokl. Akad. Nauk.*, **73**, 445
- [102] Krein, M.G. (1955), *Izvestia Akad. Neuk. Moscou*, **411**
- [103] Kuijken, K. (1993), Self-consistent models for triaxial galaxies with flat rotation curves: the disk case, *ApJ*, **409**, 68-74
- [104] Kuzmin, G. G. (1956), *AZh*, **33**, 27

- [105] Kuzmin, G. G. (1973), in *Dynamics of galaxies and Clusters*, ed. T.B. Omarov, Alma Ata: Akad. Nauk. Kaz. SSR, 71-75 (in russian); english translation in IAU Symposium 127, *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, ed. P.T. de Zeeuw, Dodrecht: Reidel, 553-557
- [106] Laskar, J. (1988), Secular evolution of the solar system over 10 million years, *A&A*, **198**, 341-362
- [107] Laskar, J. (1990), The chaotic motion of the solar system. A numerical estimate of the size of the chaotic zones, *Icarus*, **88**, 266-291
- [108] Laskar, J. (1993), Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion, *Physica D*, **67**, 257-281
- [109] Laskar, J. (1995), Frequency map analysis of a Hamiltonian system, in AIP Conference Proceedings 344, *Non-Linear Dynamics in Particle Accelerators : Theory and Experiments*, eds. S. Chattopadhyay, M. Cornacchia and C. Pellegrini, AIP Press
- [110] Laskar, J. (1996), Introduction to frequency map analysis , in NATO-ASI *Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom*, eds. C. Simo and A. Delshams, Kluwer, (in press)
- [111] Laskar, J., Froeschlé, C. and Celletti, A. (1992), The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard map, *Physica D* , **56**, 253-269
- [112] Laskar, J., Joutel, F. and Robutel, P. (1993), Stabilisation of the Earth's obliquity by the moon, *Nature*, **361**, 615-617
- [113] Laskar, J. and Robutel, P. (1993), The chaotic obliquity of the planets, *Nature*, **361**, 608-612
- [114] Laskar, J. and Robin, D. (1996), Application of frequency map analysis to the ALS, *Part. Accel.*, **54**, 183-192
- [115] Lauer, T. R. (1985), The cores of elliptical galaxies, *ApJ*, **292**, 104-121
- [116] Lauer, T. R., Ajhar, E.A, Byun, Y.I., Dressler, A., Faber, S.M., Grillmair, C., Gebhardt, K., Richstone, D.O. and Tremaine, S.D. (1995), The Centers of Early-Type Galaxies with HST.I. An Observational Survey, *AJ*, **110**, 2622
- [117] Lees, J. F. and Schwarzschild, M. (1992), The orbital structure of galactic halos, *ApJ*, **384**, 491-501
- [118] Levison, H.F. and Richstone, D.O. (1987), Triaxial scale-free models of highly flattened elliptical galaxies with and without massive halos, *ApJ*, **314**, 476-492
- [119] Lichtenberg, A. J. and Liebermann, M. A. (1992) *Regular and Chaotic Dynamics*, AMS 38, 2nd edition, Springer-Verlag, New York
- [120] Lindstedt, M. (1882), *Astron. Nach.* **103**, 211

- [121] Liouville, J. (1855), *Journal de Math.* **XX**, 137
- [122] Lyapounov, A. (1892), Problème général de la stabilité du mouvement, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, **17**, (2), 204-474
- [123] MacKay, R.S., Meiss, J.D. and Percival, I.C. (1984), Transport in Hamiltonian Systems, *Physica D*, **13**, 55-81
- [124] Magnenat, P. (1982), Periodic orbits in triaxial galactic models, *A&A*, **108**, 89-94
- [125] Martinet, L. and de Zeeuw, P.T. (1988), Orbital stability in rotating triaxial stellar systems, **206**, 269-278
- [126] McGehee, R. (1974), Triple collision in the collinear three body problem, *Invent. Math.*, **27**, 191-227
- [127] McGill, C. and Binney, J. (1990), Torus construction in general gravitational potentials, *MNRAS*, **244**, 634-645
- [128] Meritt, D. (1993), Dynamics of elliptical galaxies, *Science*, **259**, 1867-1871
- [129] Merritt, D. (1996), Chaos and elliptical galaxies, in *Cel. Mech.*, **64**, 55-67
- [130] Merritt, D. (1997), Dynamics of triaxial stellar systems, in “*The Nature of Elliptical Galaxies*”, Proc. of the 2nd Stromlo Symposium, eds. M. Arnaboldi, G.S. Da Costa and P. Saha (in press) Dordrecht (in Press)
- [131] Merritt, D. and Fridman, T. (1995), Equilibrium and stability of elliptical galaxies, in *Fresh Views of Elliptical Galaxies*, eds. A. Buzzoni, A. Renzini, A. Serrano
- [132] Merritt, D. and Fridman, T. (1996), Triaxial galaxies with cusps, *ApJ*, **460**, 136-162
- [133] Merritt, D. and Valluri, M. (1996), Chaos and mixing in triaxial stellar systems, *ApJ*, **471**, 82-105
- [134] Meyer, K.R. and Hall, G.L. (1992), *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body problem*, AMS 90, Springer-Verlag
- [135] Mihalas, D. and Binney, J. (1981), *Galactic Astronomy*, 2nd eds. San Francisco : Freeman
- [136] Miralda-Escudé, J. and Schwarzschild, M. (1989), On the orbit structure of the logarithmic potential, *ApJ*, **339**, 752-762
- [137] Morbidelli, A. (1993), On the successive elimination of perturbation harmonics, *Celest. Mech.*, **55**, 101-130
- [138] Morbidelli, A. and Giorgilli, A. (1995), Superexponential stability of KAM tori, *J. Stat. Phys.*, **78**, 1607-1617
- [139] Moser, J. (1958), New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems, *Com. Pure Appl. Math.*, **11**, 81-114

- [140] Moser, J. (1962), On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, *Nachr. Akad. Wiss. Gött. Math. Phys.* **2**, 1-20
- [141] Nekhorochev, N.N. (1977), An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, *Russ. Math. Surveys*, **32**, 1-65
- [142] Noid, D.W., Koszykowski, M. and Marcus R.A., (1979), A spectral analysis method of obtaining molecular spectra from classical trajectories, *J. Chem. Phys.*, **67**, 404-408
- [143] Noid, D.W., Koszykowski, M. and Marcus R.A., (1979), Semiclassical calculation of bound states in multidimensional systems with Fermi resonance, *J. Chem. Phys.*, **71**, 2864
- [144] Pannekoek, A. (1961), *A history of astronomy*, George Allen & Unwin Ltd. (reprinted in 1989 by Dover)
- [145] Papaphilippou, Y. and Laskar, J. (1996), Frequency map analysis and global dynamics in a galactic potential with two degrees of freedom, *A&A*, **307**, 427-449
- [146] Papaphilippou, Y. and Laskar, J. (1997), Global dynamics of triaxial galactic models through frequency map analysis, *A&A*, (submitted)
- [147] Papaphilippou, Y. and Laskar, J. (1997), Diffusion in triaxial galactic models, *A&A* (in preparation)
- [148] Patsis, P. and Zachilas, L. (1990), Complex instability of simple periodic orbits in a realistic two-component galactic potential, *A&A*, **227**, 37-48
- [149] Pearce, T. and Thomas P.A. (1991), Ring formation in triaxial potentials, *MNRAS*, **248**, 688-700
- [150] Percival, I.C. (1977), Semiclassical theory of bound states, *Adv. Chem. Phys.*, **36**, 1
- [151] Perco, L. (1991), *Differential Equations and Dynamical Systems*, TAM 7, Springer-Verlag
- [152] Petrou, M. (1984), The response density of irregular orbits in barred potentials, *MNRAS*, **211**, 283-295
- [153] Pfenniger, D. (1984), The 3D dynamics of barred galaxies, *A&A*, **134**, 373-386
- [154] Pfenniger, D. (1984), The velocity fields of barred galaxies, *A&A*, **141**, 171-188
- [155] Pfenniger, D. (1985), Numerical study of complex instability, *A&A*, **150**, 97-111
- [156] Poincaré, H. (1892-93-99), *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Vols. 1-3, Gauthiers-Villars, Paris, reimprimé par Blanchard (1987)
- [157] Pöschel, J. (1982), Integrability of Hamiltonian systems on cantor sets, *Comm. Pure Appl. Math.*, **35**, 653-695
- [158] Press, W., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T. (1988), *Numerical Recipes in FORTRAN*, Cambridge University Press

- [159] Prince, P.J. and Dormand, J.R. (1981), High order embedded Runge-Kutta formulae, *J. Comp. Appl. Math.*, **7**, 67-75
- [160] Reichl, L.E. (1992), *The Transition to Chaos: in Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations*, INLS, Springer-Verlag
- [161] Reynolds, J. H. (1913), The Light Curve of the Andromeda nebulae, *MNRAS* **74**, 132-136
- [162] Richstone, D. (1980), Scale-free axisymmetric galaxy models with little angular momentum, *ApJ*, **238**, 103-109
- [163] Richstone, D. (1982), Scale-free models of galaxies. II. A complete survey of orbits, *ApJ*, **252**, 496-506
- [164] Richstone, D. (1984), Scale-free models of galaxies. III. A survey of the oblate E6 solution set, *ApJ*, **281**, 100-111
- [165] Rosenblath, M.N., Sagdeev, R.Z., Taylor, J.B. and Zaslavskii, G.M. (1966), Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities, *Nucl. Fusion*, **6**, 297-300
- [166] Sandage, A. (1964), *The Hubble Atlas of Galaxies*, Washington DC: Carnegie Inst.
- [167] Scuflaire, R. (1995), Stability of axial orbits in analytic galactic potentials, *Celest. Mech.*, **61**, 261-285
- [168] Schwarzschild, M. (1979), A numerical model for a triaxial stellar system in dynamical equilibrium, *ApJ*, **232**, 236-247
- [169] Schwarzschild, M. (1982), Triaxial equilibrium models for elliptical galaxies with slow figure rotation, *ApJ*, **263**, 599-610
- [170] Schwarzschild, M. (1993), Self-consistent models for galactic halos, *ApJ*, **409**, 563-577
- [171] Schweizer, F. (1979), Effects of seeing on the light distribution in the cores of elliptical galaxies, *ApJ*, **233**, 23-34
- [172] Shirts, R.B. and Reinhardt, W.P. (1982), Approximate constants of motion for classically chaotic vibrational dynamics: vague tori, semiclassical quantization and classical intramolecular energy flow, *J. Chem. Phys.*, **77**, 5204-5217
- [173] Spitzer, L. and Hart, M.H. (1971), Random gravitational encounters and the evolution of spherical systems. I. Method, *ApJ*, **164**, 399-409
- [174] Spohn, H. (1991), *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*, TMP, Springer-Verlag
- [175] Stäckel, P. (1890), *Math. Ann.*, **35**, 91
- [176] Stäckel, P. (1893), *Math. Ann.*, **42**, 537
- [177] Stark, A.A. (1977), Triaxial Models of the Bulge of M31, *ApJ*, **213**, 368-373
- [178] Statler, T.S. (1987), Self-consistent models of perfect triaxial galaxies, *ApJ*, **321**, 113-152

- [179] Syer, D. and Tremaine, S. (1996), Made-to-measure N-Body systems, *MNRAS*, **282**, 223-233
- [180] Tonry, J.L. (1987), A central black hole in M32, *ApJ*, **322**, 632-642
- [181] Tremaine, S., Richstone, D.O., Byun, Y.-I., Dressler, A., Faber, S.M., Grillmair, C., Kormendy, J. and Lauer, T.R. (1994), A family of models for spherical stellar systems, *AJ*, **107**, 634-644
- [182] Udry, S. and Pfenniger, D. (1988), Stochasticity in elliptical galaxies, *A&A*, **198**, 135-149
- [183] Van der Marel, R.P., Evans, N.W., Rix, H.W., White, S.D.M. and de Zeeuw T. (1994), Velocity profiles of galaxies with claimed black holes. II. $f(E, L_z)$ models for M32, *MNRAS*, **274**, 99-117
- [184] Verhulst, F. (1989), *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag
- [185] Vlassov, A.A. (1938), *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, **8**, 291
- [186] Vlassov, A.A. (1961), *Many-Particle Theory and its Applications to Plasma Physics*, Gordon and Breach, New York
- [187] Von Zeipel, H. (1916), *Ark. Astron. Math. Phys.*, **11**, No. 1
- [188] Voyatzis, G. and Ichtiaroglou, S. (1992), On the spectral analysis of trajectories in near-integrable Hamiltonian systems, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25**, 5931-5943
- [189] Warnock, R. L. and Ruth, R.D. (1992), Long-term bounds on nonlinear Hamiltonian motion, *Physica D*, **56**, 188-215
- [190] Yakubovich, V.A. and Stazhinskii, V.M. (1975), *Linear Differential Equations with Periodic Coefficients*, John Wiley, New York